第 32 卷　第 1 期　　西 南 师 范 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　2007 年 2 月
Vol. 32　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　Feb.　2007

文章编号：1000－5471(2007)01－0140－05

Rolle 中值定理的推广[①]

陈 清 明

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 对 Rolle 中值定理的条件作了改进，把函数可导推广为左或右可导，把有限区间推广为无限区间，把函数在区间端点处的函数值相等推广为可以不等．主要建立了如下的推广定理：

设函数 $f(x)$ 在有限或无限区间 (a, b) 上连续，$f(x)$ 在 (a, b) 内右(或左)可导，并存在 $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (a, b)$ 使

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = A \qquad A \text{ 为实数或} \pm\infty$$

则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$，使得 $f'_+(\xi) \geqslant 0$，$f'_+(\eta) \leqslant 0$ (或 $f'_-(\xi) \geqslant 0$，$f'_-(\eta) \leqslant 0$)．更进一步，设 $f'_+(x)$ (或 $f'_-(x)$) 在 (a, b) 内左(或右)连续，则存在 $\zeta \in (a, b)$ 使得 $f'_+(\zeta) = 0$ (或 $f'_-(\zeta) = 0$)．

关　键　词： 导数；右导数；左连续；中值定理

中图分类号：O172　　　　**文献标识码：A**

微分中值定理是一元函数微分学的基本定理，是应用导数研究函数在区间上整体性态的有力工具．而 Rolle 中值定理[1] 是基础．其它中值定理的证明是通过 Rolle 中值定理来实现的．鉴此，不少数学工作者根据自己的教学经验，对 Rolle 中值定理作了许多改进及推广工作．本文对 Rolle 中值定理的 3 个条件作了改进，把函数可导推广为左或右可导，把有限区间推广为无限区间，把函数在区间端点处的函数值相等推广为可以不等，获得了一些重要结论，所得结果推广了已有的一些工作．

在 Rolle 中值定理中，要求 f 在有限开区间 (a, b) 内可导，这一条件应该说比较强．若把定理的条件(ii)减弱为 f 在开区间 (a, b) 内处处右(或左)可导，我们自然会问，在 (a, b) 内是否存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'_+(\xi) = 0$ (或 $f'_-(\xi) = 0$)?答案是否定的．例如：设 $f(x) = |x|$，$x \in [-1, 1]$，显然 f 在 $(-1, 1)$ 内处处右可导，但对任意的 $\xi \in (-1, 1)$，都有 $f'_+(\xi) \neq 0$．然而我们对(左)右导函数可获得下面的结论(只讨论右导数，左导数类似可得)：

定理 1　设 (i) f 在 $[a, b]$ 上连续；

(ii) f 在 (a, b) 内存在右导数；

(iii) $f(a) = f(b)$．

则存在 $\xi, \eta \in (a, b)$，使得 $f'_+(\xi) \geqslant 0$，$f'_+(\eta) \leqslant 0$．

证　因 f 在 $[a, b]$ 上连续，所以 f 在 $[a, b]$ 上取到最大值 M 和最小值 m，若 $m = M$，则 f 在 $[a, b]$ 上必为常数，从而结论显然成立．

若 $m < M$，则因 $f(a) = f(b)$，使得最大值 M 和最小值 m 至少有一个在 (a, b) 内某点 ξ 处取得，设 $\xi \in (a, b)$ 是 f 的最小值点，于是

$$f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geqslant 0$$

① 收稿日期：2006－01－04
基金项目：西南师范大学科技基金资助项目(413059)．
作者简介：陈清明(1965－)，男，重庆铜梁人，副教授，主要从事非线性泛函分析的研究．

取 $c\in(a,\xi)$，因 f 在 $[c,\xi]$ 上连续，则存在 $\eta\in[c,\xi)$，使 $f(\eta)$ 为 f 在 $[c,\xi]$ 上的最大值，从而

$$f'_+(\eta)=\lim_{x\to\eta^+}\frac{f(x)-f(\eta)}{x-\eta}\leqslant 0$$

注 1　由定理 1 可导出 Rolle 中值定理. 事实上，若 Rolle 中值定理的条件满足，则 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x)$. 由定理 1，存在 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi_1)\geqslant 0$，$f'_+(\xi_2)\leqslant 0$. 如果 $f'_+(\xi_1)=0$ 或 $f'_+(\xi_2)=0$，则结论成立；如果 $f'_+(\xi_1)>0$，$f'_+(\xi_2)<0$，则在 $[\xi_1,\xi_2]$ 或 $[\xi_2,\xi_1]$ 上应用达布定理[1]，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

推论 1　设 f 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内存在右导数，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'_+(\xi)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad f'_+(\eta)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证　作函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，对 $F(x)$ 应用定理 1 即可证.

注 2　由定理 1 及达布定理可推出文献[1] 中 Lagrange 中值定理.

例 1　设 f 在区间 I 上连续，在 I 内处处右可导，且 $|f'_+(x)|\leqslant M$，则 f 在区间 I 上一致连续.

证　$\forall x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$，由推论 1 及 $|f'_+(x)|\leqslant M$，存在 $\xi,\eta\in(x_1,x_2)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'_+(\xi)\leqslant M\qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f'_+(\eta)\geqslant -M$$

从而

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant M$$

即

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/M$，则 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

注 3　在例 1 中只要求 $f'_+(x)$ 在区间 I 上右导数有界的条件比一般教参上要求 f 在 I 内导函数有界要弱些.

由推论 1 立即可得

命题 1　设 f 在区间 I 上连续，且在 I 内存在右导数，则

(1) f 在 I 上递增(减)的充要条件是 $f'_+(x)\geqslant 0$ $(f'_+(x)\leqslant 0)$；

(2) 若 $f'_+(x)>0$ $(f'_+(x)<0)$，则 f 在区间 I 上严格递增(严格递减).

命题 2　设函数 f 在 x_0 的某一邻域 $\cup(x_0)$ 内连续，在 $\cup(x_0)$ 内右(或左)可导且 $f'_+(x)$ 在 x_0 处左(或右)连续，又 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'_+(x_0)=0$(或 $f'_-(x_0)=0$).

证　下面只就右导数证明. 不妨设 x_0 为 f 的极大值点，则

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

下证：$f'_+(x_0)<0$ 不成立.

若 $f'_+(x_0)<0$，由 $f'_+(x)$ 在 x_0 处左连续及 x_0 为 f 的极大值知，存在 $\delta>0$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0]$，使 $f'_+(x)<0$ 且 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

由命题 1 的(2)，f 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上严格递减，从而 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f(x)>f(x_0)$，矛盾. 故 $f'_+(x_0)=0$.

例 2　若函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内右可导，且 $f'_+(x)>g'_+(x)$，$f(a)=g(a)$，则在 $(a,b]$ 内有 $f(x)>g(x)$.

证　作函数 $G(x)=f(x)-g(x)$，对 $G(x)$ 应用命题 1(2) 可证.

注 4　例 2 推广了文献[1] 中第六章第 2 节的习题 15.

推论 2　设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在右导数且 $g(a)\neq g(b)$，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'_+(\xi)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'_+(\xi)\qquad f'_+(\eta)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'_+(\eta)$$

证　作函数 $T(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$，对 $T(x)$ 应用定理 1 可证.

注 5 Cauchy 中值定理可由推论 2 及达布定理推出，在推论 2 中令 $g(x)=x$ 即得推论 1.

下面将定理 1 中的条件 (i)，(iii) 作改进，得到以下结果：

定理 2 设(i) f 在有限或无限区间 (a, b) 上连续；

(ii) $f'_+(x)$ 在 (a, b) 内存在；

(iii) 存在 $\{a_n\}\subset(a, b)$，$\{b_n\}\subset(a, b)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 且

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=A \qquad A \text{ 为实数或} \pm\infty$$

则存在 $\xi,\eta\in(a, b)$，使得 $f'_+(\xi)\geqslant 0$，$f'_+(\eta)\leqslant 0$.

证 对 a,b,A 就下面几种情形进行证明，其它情形可类似证明.

(1) $-\infty<a<b<+\infty$，$-\infty<A<+\infty$.

若 $\forall x\in(a, b)$，有 $f(x)\equiv A$，则 $f'_+(x)\equiv 0$，结论成立.

若存在 $x_0\in(a, b)$，有 $f(x_0)\neq A$，不妨设 $f(x_0)>A$，取 $0<\alpha<f(x_0)-A$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=A$，必存在 N，使得

$$a<a_N<x_0<b_N<b$$

$$f(a_N)<A+\alpha<f(x_0)$$

$$f(b_N)<A+\alpha<f(x_0)$$

又 f 在 (a, b) 上连续，从而 f 在 $[a_N, x_0]$，$[x_0, b_N]$ 上连续，由连续函数的介值定理知，分别存在 $\xi_1\in(a_N, x_0)$，$\xi_2\in(x_0, b_N)$，使 $f(\xi_1)=A+\alpha=f(\xi_2)$. 由定理 1，存在 $\xi,\eta\in(\xi_1, \xi_2)\subset(a, b)$，使得 $f'_+(\xi)\geqslant 0$，$f'_+(\eta)\leqslant 0$.

(2) $-\infty<a<+\infty$，$b=+\infty$，$A=+\infty$.

取定 $x_1\in(a, +\infty)$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=+\infty$，必存在 K,N，使得 $a<a_N<x_1<b_K<+\infty$ 且 $f(b_K)>f(a_N)>f(x_1)$. 又 f 在 (a, b) 上连续，从而 f 在 $[x_1, b_K]$ 上连续，由介值定理知，存在 $\xi_1\in(x_1, b_K)$，使 $f(\xi_1)=f(a_N)$，由定理 1，存在 $\xi,\eta\in(\xi_1, \xi_2)\subset(a, b)$，使得 $f'_+(\xi)\geqslant 0$，$f'_+(\eta)\leqslant 0$.

(3) $a=-\infty$，$b=+\infty$，$-\infty<A<+\infty$.

作变换 $x=\tan t$，令 $F(t)=f(\tan t)$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，易见 $F(t)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内连续，$F'_+(t)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内存在，记 $\alpha_n=\arctan a_n$，$\beta_n=\arctan b_n$，则 $\{\alpha_n\}\subset\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\{\beta_n\}\subset\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=-\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{\pi}{2}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}F(\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}f(\tan\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A$$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty}F(\beta_n)=A$，故由(1)，存在 $\bar{\xi}$，$\bar{\eta}\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $F'_+(\bar{\xi})\geqslant 0$，$F'_+(\bar{\eta})\leqslant 0$，即

$$f'_+(\tan\bar{\xi})\sec^2\bar{\xi}\geqslant 0 \qquad f'_+(\tan\bar{\eta})\sec^2\bar{\eta}\leqslant 0$$

而 $\sec^2\bar{\xi}\neq 0$，$\sec^2\bar{\eta}\neq 0$，故 $f'_+(\tan\bar{\xi})\geqslant 0$，$f'_+(\tan\bar{\eta})\leqslant 0$，记 $\xi=\tan\bar{\xi}$，$\eta=\tan\bar{\eta}$，则 $f'_+(\xi)\geqslant 0$，$f'_+(\eta)\leqslant 0$.

注 6 定理 2 推广了文献[2] 的定理 1.

根据函数极限与数列极限的关系定理(归结原则) 及定理 2 可得

推论 3 设 f 在有限或无限区间 (a, b) 上连续，在 (a, b) 内存在右导数，且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x)=A \qquad A \text{ 为实数或} \pm\infty$$

则存在 $\xi,\eta\in(a, b)$，使得 $f'_+(\xi)\geqslant 0$，$f'_+(\eta)\leqslant 0$.

由推论 3 及达布定理易得

命题 3 设函数 f 在有限或无限区间 (a, b) 内可导且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=A$ (A 为实数或 $\pm\infty$)，

则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

注 6　命题 3 即为文献[3]的定理 2－4.

推论 4　设 f 在有限区间(a,b)上连续，在(a,b)内存在右导数，且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=A\qquad \lim_{x\to b-0}f(x)=B\qquad A,B\text{ 为有限实数}$$

则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)\geqslant\dfrac{B-A}{b-a}$，$f'_+(\eta)\leqslant\dfrac{B-A}{b-a}$.

证　作函数 $g(x)=\begin{cases}A,\ x=a\\ f(x),\ x\in(a,b)\\ B,\ x=b\end{cases}$，$F(x)=g(x)-\dfrac{B-A}{b-a}x$，对 $F(x)$ 应用推论 3 可证.

注 7　由推论 4 及达布定理可证：若函数 f 在有限区间(a,b)内可导，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$（$A,B$ 为实数），则存在 $c\in(a,b)$，使得 $B-A=f'(c)(b-a)$.

下面我们将进一步讨论在怎样的条件下，一定存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$（或 $f'_-(\xi)=0$）. 显然，若把定理 1 中的条件 (ii) 加强为 $f'_+(x)$ 在(a,b)内连续，则由定理 1 及连续函数的介值定理可得

命题 4[3]　设 (i) f 在$[a,b]$上连续；

(ii) $f'_+(x)$（或 $f'_-(x)$）在(a,b)内连续；

(iii) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$（或 $f'_-(\xi)=0$）.

若把命题 4 的条件 (ii) 减弱为 $f'_+(x)$（或 $f'_-(x)$）在(a,b)内左（或右）连续，则结论仍成立. 即

定理 3　设(i) f 在$[a,b]$上连续；

(ii) $f'_+(x)$ 在(a,b)内左连续；

(iii) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$.

证　因 f 在$[a,b]$上连续，所以 f 在$[a,b]$上取到最大值 M 和最小值 m，分两种情况来讨论.

(1) 若 $m=M$，则 f 在$[a,b]$上必为常数，从而结论显然成立.

(2) 若 $m<M$，则因 $f(a)=f(b)$，使得最大值 M 和最小值 m 至少有一个在(a,b)内某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 f 的极值点. 由命题 2 知 $f'_+(\xi)=0$.

把定理 3 中的有限区间(a,b)推广到无限区间，得到

定理 4　设(i) f 在有限或无限区间(a,b)上连续；

(ii) $f'_+(x)$ 在(a,b)内左连续；

(iii) 存在$\{a_n\}\subset(a,b)$，$\{b_n\}\subset(a,b)$使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 且

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=A\qquad A\text{ 为实数或 }\pm\infty$$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$.

证　下面只就两种情形进行证明，其它情形类似可证.

(1) $-\infty<a<b<+\infty$，$-\infty<A<+\infty$.

若 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f(x)\equiv A$，则 $f'_+(x)\equiv0$，此时 ξ 可取(a,b)内的任何一点，结论成立.

若存在 $x_1\in(a,b)$，有 $f(x_1)\neq A$，不妨设 $f(x_1)>A$. 如果 x_1 为 f 在(a,b)内的最大值点，则由命题 2 知必有 $f'_+(x_0)=0$；若 x_1 不为 f 在(a,b)内的最大值点，则存在 $x_2\in(a,b)$，使 $f(x_2)>f(x_1)>A$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=A$，必存在 N，使得 $a<a_N<x_2<b_N<b$ 且 $f(a_N)<f(x_1)<f(x_2)$，$f(b_N)<f(x_1)<f(x_2)$. 又 f 在(a,b)上连续，从而 f 在$[a_N,x_2]$，$[x_2,b_N]$上连续，由连续函数的介值定理知，分别存在 $\xi_1\in(a_N,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,b_N)$，使 $f(\xi_1)=f(x_1)=f(\xi_2)$. 再由定理 3，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)=0$.

(2) $-\infty<a<+\infty$，$b=+\infty$，$A=+\infty$.

取定 $x_1\in(a,+\infty)$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=+\infty$，必存在 K,N，使

得 $a < a_N < x_1 < b_K < +\infty$ 且 $f(b_K) > f(a_N) > f(x_1)$，又 f 在 (a,b) 上连续，从而 f 在 $[x_1, b_K]$ 上连续，由介值定理知，存在 $\xi_1 \in (x_1, b_K)$，使 $f(\xi_1) = f(a_N)$，由定理 3，存在 $\xi \in (a_N, \xi_1) \subset (a, b)$，使得 $f'_+(\xi) = 0$.

注 8　定理 4 推广了文献[3]的定理 6

定理 5　设(i) f 在有限区间 (a,b) 上连续；

(ii) $f'_+(x)$ 在 (a,b) 内左连续；

(iii) 存在 $\{a_n\} \subset (a,b)$，$\{b_n\} \subset (a,b)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A,\ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = B \qquad A, B \text{ 为实数}$$

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $B - A = f'_+(\xi)(b-a)$.

证　作函数 $F(x) = f(x) - \dfrac{B-A}{b-a}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} F(b_n) = \dfrac{Ab-Ba}{b-a}$，对 $F(x)$ 应用定理 4，存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $F'_+(\xi) = 0$，故 $B - A = f'_+(\xi)(b-a)$.

推论 6　设 f 在有限区间 (a,b) 上连续，$f'_+(x)$ 在 (a,b) 内左连续，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B$ (其中 A, B 为有限实数)，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $B - A = f'_+(\xi)(b-a)$.

注 9　推论 6 推广了文献[4]的定理 2.

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京：高等教育出版社，2003：119－120.

[2] 赵明方，杨新华，周金峰. 中值定理的一个新推广 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，1994，17(4)：59－62.

[3] 林银河. 关于 Rolle 中值定理的推广 [J]. 丽水师范专科学校学报，2000，22(2)：17－19.

[4] 胡　平，程国勋. 单侧导数与中值定理 [J]. 青海师范专科学校学报(自然科学版)，2000，(6)：36－38.

A Generalization of Rolle Mean-Value Theorem

CHEN Qing-ming

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, by improving the conditions of Rolle mean-value theorem, from derivable function to left (or right)-derivable function, finite interval to infinite interval, function value of equality at ends of interval to inequality, the authors establishes a generalization theorem of Rolle mean-value theorem as folloms:

Theorem　Let f be continuous and right(or left)-derivable on(a, b)(finite or infinite interval). And suppose there exist $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset (a, b)$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ and $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$ $(-\infty < A < +\infty$ or $A = \pm\infty)$. Then there exist ξ, $\eta \in (a, b)$ such that $f'_+(\xi) \geqslant 0$ and $f'_+(\eta) \leqslant 0$ (or $f'_-(\xi) \geqslant 0$ and $f'_-(\eta) \leqslant 0$).

Furthermore suppose $f'_+(x)$(or $f'_-(x)$) is left (or right)-continuous. Then there exists $\zeta \in (a, b)$ such that $f'_+(\zeta) = 0$(or $f'_-(\zeta) = 0$).

Key words: derivative; right-derivative; left-continuation; mean-value theorem

责任编辑　覃吉康