文章编号：1000－5471(2007)01－0028－03

$A_n(n\geqslant 5)$的单性的一个新证明[①]

王兆浩，　曹洪平，　段泽勇

西南大学 数学与统计学院，400715 重庆

摘要： 给出了一个判断含单极大子群的群为单群的条件，并且通过对这个条件的验证给出了 $A_n(n\geqslant 5)$ 是单群的一个新的证明.

关　键　词： 群；单群；极大子群

中图分类号： O152.1　　**文献标识码：** A

文献[1]给出了关于 $A_n(n\geqslant 5)$ 是单群的一个经典证明．随后，文献[2]利用 $A_n(n\geqslant 3)$ 可被 3－循环生成的结论，通过对换位子运算给出了一个新的证明．1955 年，文献[3]第一次用数学归纳法证明了 $A_n(n\geqslant 5)$ 的单性．1976 年，文献[4]给出了一个比以往都简单的证明．本文用比较初等的知识和归纳的方法也给出了 $A_n(n\geqslant 5)$ 是单群的一个新的证明．这个证明无论是对首项 A_5 的单性的证明，还是归纳的过程都要比文献[3]的归纳法的证明简单.

引理 1　设 H 是群 G 的单极大子群且 H 非正规，如果 $|G:H|\leqslant\min\{|g^G|\,\big|\,1\neq g\in G\}$，那么 G 是单群.

证　假设 G 非单，取 G 的非平凡子群 N．因为 $N\cap H\trianglelefteq H$，所以由 H 的单性和极大性知 $N\cap H=1$，且 $G=HN$；因此 $|G:H|=|HN:H|=|N/N\cap H|=|N|$，而这与

$$|G:H|\leqslant\min\{|g^G|\,\big|\,1\neq g\in G\}<1+\min\{|g^G|\,\big|\,1\neq g\in G\}\leqslant|N|$$

矛盾．结论得证.

注 1　对 A_4 而言，A_3 是其单极大子群，但 A_4 中(12)(34)所在共轭类长为 3，小于 $4=|A_4:A_3|$．我们知道 A_4 恰又非单，说明了我们引理中条件 $|G:H|\leqslant\min\{|g^G|\,\big|\,1\neq g\in G\}$ 的重要性.

引理 2　当 $n\geqslant 3$ 时，对任意的 $\alpha\in A_{n+1}\backslash A_n$，$\alpha$ 都可表示为：$\alpha=\gamma(x,\ y,\ n+1)$，其中 $\gamma\in A_n$，x,y 均小于 $n+1$ 且 $x\neq y$.

证　因 α 可写为不交轮换的乘积，故不妨设

$$\alpha=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_t)\cdots(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_l)(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r,\ n+1)$$

其中 $t>1,\ \cdots,\ l>1,\ r\geqslant 1$，因此

$$\alpha=(i_1,\ i_2)(i_1,\ i_3)\cdots(i_1,\ i_t)\cdots(k_1,\ k_2)(k_1,\ k_3)\cdots(k_1,\ k_l)(x_1,\ x_2)(x_1,\ x_3)\cdots(x_1,\ x_r)(x_1,\ n+1)$$

当 $r>1$ 时，不妨记

$$\gamma=(i_1,\ i_2)(i_1,\ i_3)\cdots(i_1,\ i_t)\cdots(k_1,\ k_2)(k_1,\ k_3)\cdots(k_1,\ k_l)(x_1,\ x_2)(x_1,\ x_3)\cdots(x_1,\ x_{r-1})$$

显然，$\gamma\in A_n$ 且

$$\alpha=\gamma(x_1,\ x_r)(x_1,\ n+1)=\gamma(x_1,\ x_r,\ n+1)$$

当 $r=1$ 时

---

① 收稿日期：2005－12－06

作者简介：王兆浩(1979－)，男，河南唐河人，硕士研究生，主要从事群论研究.

$$\alpha=(i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_t)\cdots(k_1,k_2)(k_1,k_3)\cdots(k_1,k_l)(x_1,n+1)$$
$$=i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_t)\cdots(k_1,k_2)(k_1,k_3)\cdots(k_1,k_l)(x_1,k_l)(x_1,k_l)(x_1,n+1)$$

此时，不妨记

$$\gamma=(i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_t)\cdots(k_1,k_2)(k_1,k_3)\cdots(k_1,k_l)(x_1,k_l)$$

显然 $\gamma\in A_n$ 且

$$\alpha=\gamma(x_1,k_l)(x_1,n+1)=\gamma(x_1,k_l,n+1)$$

综上结论得证.

引理 3　当 $n\geqslant 3$ 时，A_n 是 A_{n+1} 的极大子群.

证　任取 $\alpha\in A_{n+1}\backslash A_n$，只需证 $\langle A_n,\alpha\rangle=A_{n+1}$ 即可. 易知 $\langle A_n,\alpha\rangle\leqslant A_{n+1}$，故只需证 $A_{n+1}\leqslant\langle A_n,\alpha\rangle$.

任取 $\beta\in A_{n+1}$，若 $\beta\in A_n$，则 $\beta\in\langle A_n,\alpha\rangle$，故令 $\beta\in A_{n+1}\backslash A_n$. 由引理 2，不妨设

$$\alpha=\gamma(x,y,n+1)\qquad\beta=\gamma_1(x',y',n+1)$$

其中 $\gamma,\gamma_1\in A_n$.

(1) 若 $x\neq x'$，$y\neq y'$ 或 $x=x'$，$y=y'$，则另取 $\gamma_2=(x',x)(y',y)\in A_n$. 易验证，$\gamma_2\gamma^{-1}\alpha\gamma_2=(x',y',n+1)$，所以 $\beta=\gamma_1\gamma_2\gamma^{-1}\alpha\gamma_2\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

(2) 若 $x=x'$，$y\neq y'$，可取 $\gamma_2=(x',y',y)\in A_n$. 易验证，$\gamma_2\gamma^{-1}\alpha=(x',y',n+1)$，所以 $\beta=\gamma_1\gamma_2\gamma^{-1}\alpha\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

同理可证得，当 $x\neq x'$，$y=y'$ 时，仍有 $\beta\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

(3) $x=y'$，$y\neq x'$ 时，可取 $\gamma_2=(y',x',y)\in A_n$，易验证，$\gamma_2\gamma^{-1}\alpha=(y',x',n+1)$，因此，$\beta=\gamma_1(\gamma_2\gamma^{-1}\alpha)^{-1}\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

同理可证得，当 $x\neq y'$，$y=x'$ 时，仍有 $\beta\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

(4) 若 $x=y'$，$y=x'$，则有 $\beta=\gamma_1(\gamma^{-1}\alpha)^{-1}\in\langle A_n,\alpha\rangle$.

综上知，$A_{n+1}\leqslant\langle A_n,\alpha\rangle$.

综上，结论得证.

引理 4　当 $n\geqslant 5$ 时，A_n 是单群.

证　首先证明 A_5 是单群.

令 N 是 A_5 的非平凡正规子群，所以 $N\cap A_4\trianglelefteq A_4$，因为 Klein 四元群 B_4 是 A_4 的唯一非平凡正规子群，再由 A_4 是 A_5 的极大子群(引理 3 知)和非正规性(由于 $(123)\in A_4$，取 $(125)\in A_5\backslash A_4$，而 $(123)^{125}=(253)\notin A_4$ 说明 $A_4\ntrianglelefteq A_5$)知 $N\cap A_4=B_4$ 或 $N\cap A_4=1$. 若 $N\cap A_4=B_4$，由于 $(1,2,3)\in A_4$ 且 $(1,2,3)\notin N$，而 $(1,2)(3,4)\in B_4\leqslant N$，因此 $(12)(34)((12)(34))^{125}=(152)\in N$，从而 $(152)^{(12)(35)}=(123)\in N$，得出矛盾，故 $N\cap A_4=1$，则 $A_5=A_4N$. 由文献[5]的定理 3.15 易算得 A_5 的任何非平凡元所在共轭类长都不小于 5，故

$$|A_5:A_4|=5<1+5\leqslant|N|$$

而这与

$$|A_5:A_4|=|A_4N:A_4|=|N/N\cap A_4|=|N|$$

矛盾. 故 A_5 是单群.

当 $n\geqslant 5$ 时，假设 A_n 是单群，下证 A_{n+1} 是单群.

由引理 3 知 A_n 是 A_{n+1} 的极大子群. 又因为 $(1,2,3)\in A_n$，$n\geqslant 5$，$(1,2,n+1)\in A_{n+1}$，而 $(1,2,3)^{(1,2,n+1)}=(3,2,n+1)\notin A_n$，所以 A_n 非正规. 由文献[5]的定理 3.15 易算得 A_{n+1} 的任何非平凡元所在共轭类长都不小于 $n+1=|A_{n+1}:A_n|$，故由引理 1 知 A_{n+1} 是单群.

综上结论得证.

本文的证明过程是一个验证交错单群满足引理 1 条件的过程. 实际上，并非只有交错单群满足引理 1 的条件，这一点我们从 ATLAS 表[7] 可以看出(因为从 ATLAS 表中可以查出单群的每个元素的中心化子，从而可算出每个元所在共轭类长，另外表中也可查得单群的极大子群有哪些).

满足引理 1 的条件的一些李型单群和散在单群如下：

单群类型(G)	极大子群(H)	最短共轭类长	$\|G:H\|$
$L_2(11)$	A_5	55	11
$L_2(13)$	D_{14}	84	78
$L_2(16)$	A_5	240	68
$L_2(17)$	D_{18}	144	136
$L_2(19)$	A_5	171	57
$L_2(23)$	D_{24}	253	253
$L_3(4)$	A_6	315	56
$L_4(2)$	A_7	105	8
M_{11}	M_{10}	351	11
M_{12}	M_{11}	396	12
R_3	D_{18}	56	28
$U_3(5)$	A_7	525	50
J_1	$L_2(11)$	1463	266
$G_2(3)$	$L_2(13)$	5103	3888

参考文献:

[1] Van der Waerden B L. Modern Algebra [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1930.

[2] Redei L. Die Einfachheit-Der Alternierenden Grouppe [J]. Monatsh Math, 1951, 55: 328－329.

[3] Г Поллак. Новое Доказателвство Лростоты Знаколеременной Груллы [J]. Acta Sci Math Szeged, 1995, 16: 63－64

[4] Rose J. A course on group theory [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1978.

[5] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2001.

[6] Derek J S, Robinson. A Course in the Theory of Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[7] Conway J H, Nortion S P, Parker R A, Wilson R A. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford and New York: Oxford University Press, 1985.

Another Proof for the Simplicity of $A_n (n \geqslant 5)$

WANG Zhao-hao, CAO Hong-ping, DUAN Ze-yong

School of Mathmatics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the authors give a condition which can be used to judge a group which possesses a simple group as the maximal subgroup is simple. Further, by this condition the authors can use a new way to prove that $A_n (n \geqslant 5)$ is simple.

Key words: group; simple group, maximal subgroup

责任编辑 覃吉康