文章编号: 1000-5471(2007)01-0022-06

A-G-H 不等式的最优值①

文家金，张　勇

成都大学 数学与信息科学学院，成都 610106

摘要: 采用"降维法"证明了使不等式 $(1-\lambda)H_n^r(a)+\lambda A_n^r(a)\geqslant G_n^r(a)$ 成立的实数 λ 的最小值是

$$\lambda_* = \sup_{0<t\neq 1}\{(G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))/(A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))\mid a_*=(t,1,\cdots,1)\in R_{++}^n,\ t\neq 1\}$$

其中 $r>0$ 为实数，$A_n(a)$，$G_n(a)$，$H_n(a)$ 分别为 $n(n\geqslant 2)$ 个正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 的算术平均、几何平均及调和平均.

关　键　词: 幂平均; A-G-H 不等式; 最优值; 降维法

中图分类号: O178　　**文献标识码: A**

1　引言和主要结果

本文使用的记号与文献[1-4]一致.

文献[5]指出: 对于整个不等式课题及它在其它领域中的许多应用来说，平均都是基本的. 而幂平均则是所有平均中最重要者. 目前已有一些涉及幂平均的重要成果[1-6]. 本文旨在就 $\alpha=-1$，$\beta=1$，$\theta=0$ 的情形讨论使不等式

$$(1-\lambda)[M_n^{[\alpha]}(a)]^r+\lambda[M_n^{[\beta]}(a)]^r\geqslant[M_n^{[\theta]}(a)]^r\qquad \alpha<\theta<\beta,\ r>0 \tag{1}$$

成立的充要条件和充分条件，获得的主要结果如下:

定理 1　如果实数 $r>0$，$a\in R_{++}^n$，$n\geqslant 2$，那么使不等式

$$(1-\lambda)H_n^r(a)+\lambda A_n^r(a)\geqslant G_n^r(a) \tag{2}$$

成立的所有实数 λ 的最小值为:

$$\lambda_* = \sup_{0<t\neq 1}\{(G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))/(A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))\mid a_*=(t,1,\cdots,1)\in R_{++}^n,\ t\neq 1\} \tag{3}$$

换言之，若 λ_* 由(3)定义，则当且仅当实数 $\lambda\geqslant\lambda_*$ 时不等式(2)成立.

定理 2　如果实数 $r>0$，$a\in R_{++}^n$，$n\geqslant 2$，那么当实数

$$\lambda\geqslant t_0^{r/n}(t_0+1)^{-1}[(t_0+n-1)/n]^{1-r} \tag{4}$$

时不等式(2)成立. 不等式(2)取等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$. 其中

$$t_0=\frac{1}{2}\left\{-\frac{n(n-2)}{r(n-1)}+\sqrt{\left[\frac{n(n-2)}{r(n-1)}\right]^2+4}\right\} \tag{5}$$

为方程

$$t^2+\frac{n(n-2)}{r(n-1)}t-1=0 \tag{6}$$

的唯一正实根.

定理 3　如果实数 $r\geqslant 1$，$a\in R_{++}^n$，$n\geqslant 2$，那么当实数

① 收稿日期: 2005-11-08
基金项目: 国家自然科学基金(10671136); 四川省教育厅重点自然科学基金(2005A201).
作者简介: 文家金(1961-)，男，四川安岳人，副教授，主要从事数学不等式的研究.

$$\lambda \geqslant 1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n+1}\right)^{3}\left(\frac{2n-1}{n^{2}-1}\right)^{n^{-1}-2} \tag{7}$$

时不等式(2)成立．不等式(2)取等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$．

2　定理 1 的证明及例子

本节假设 λ_* 由(3)定义．证明分两步进行．

第一步　若 $\lambda\geqslant\lambda_*$，证明不等式(2)成立．

记 $D=\{a\mid a\in R_{++}^{n},\ a_1+\cdots+a_n=n\}$，则当 $a\in D$ 时，$A_n(a)=1$．由于(2)的两端是关于变量 a 的 r 次齐次对称函数[7,8]，故只需证明：当 $a\in D$ 时有

$$F(a)=(1-\lambda)H_n^r(a)+\lambda-G_n^r(a)\geqslant 0 \tag{8}$$

由于 $F(a)$ 在 D 上连续、可微，因此 $F(a)$ 在 D 上的最小值（或下确界）点要么是 D 的边界点，要么是 $F(a)$ 在 D 上驻点．

首先证明，若 a 为 D 的边界点，则(8)成立．此时必有某 $a_i\to 0\ (1\leqslant i\leqslant n)$．不妨设 $a_n\to 0$．则

$$a_1+\cdots+a_{n-1}=n \qquad 0\leqslant a_1,\ \cdots,\ a_{n-1}\leqslant n$$

$$H_n(a)=\left[n^{-1}\cdot(a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1})\right]^{-1}\to 0$$

$$G_n(a)=\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}\to 0 \qquad F(a)\to\lambda\geqslant\lambda_*\geqslant 0$$

因此，若 a 为 D 的边界点，则不等式(8)成立．

其次证明：若 a 为 $F(a)$ 在 D 上驻点，则(8)也成立．

首先指出，此时 a 的分量 $a_1,\cdots,a_n$ 中必有 $n-1$ 个相等．作 Lagrange 函数

$$L=F(a)+\mu(a_1+\cdots+a_n-n) \tag{9}$$

因为
$$\frac{\partial H_n(a)}{\partial a_i}=\frac{1}{n}H_n^2(a)\cdot a_i^{-2} \qquad \frac{\partial G_n(a)}{\partial a_i}=\frac{1}{n}G_n(a)\cdot a_i^{-1}$$

所以
$$\frac{\partial L(a)}{\partial a_i}=\frac{r}{n}(1-\lambda)H_n^{r+1}(a)\cdot(a_i^{-1})^2-\frac{r}{n}G_n^r(a)\cdot a_i^{-1}+\mu=0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{10}$$

因为关于 a_i^{-1} 的一元二次方程(10)的诸系数与脚码 i 无关，所以方程(10)的解 a_i^{-1} 至多有两个，故 a 的分量 $a_1,\cdots,a_n$ 中必有 $n-1$ 个数相等．

下设 a 为 $F(a)$ 在 D 上驻点．由上述论证可知，可以假设 $a=(u,v,\cdots,v)\in D$，则 $u+(n-1)v=n$，$u>0$，$v>0$．于是(8)化为

$$(1-\lambda)H_n^r(u,v,\cdots,v)+\lambda A_n^r(u,v,\cdots,v)-G_n^r(u,v,\cdots,v)\geqslant 0 \tag{11}$$

令 $t=\dfrac{u}{v}$，$t>0$，则

$$H_n^r(u,v,\cdots,v)=v^rH_n^r(a_*)$$

$$A_n^r(u,v,\cdots,v)=v^rA_n^r(a_*)$$

$$G_n^r(u,v,\cdots,v)=v^rG_n^r(a_*)$$

对不等式(11)两端除以 v^r，则(11)等价于

$$(1-\lambda)H_n^r(a_*)+\lambda A_n^r(a_*)-G_n^r(a_*)\geqslant 0 \tag{12}$$

当 $t=1$ 时，(12)取等号；当 $0<t\neq 1$ 时，由 A-G-H 不等式知，(12)等价于

$$\lambda\geqslant(G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))/(A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)) \tag{13}$$

由 $\lambda\geqslant\lambda_*$ 知，不等式(13)成立．第一步获证．

第二步　若(2)成立，证明 $\lambda\geqslant\lambda_*$．

在(2)中令 $a=a_*$，$0<t\neq 1$，则(2)化为(12)，故(13)成立．由 t 的任意性知，$\lambda\geqslant\lambda_*$ 成立．第二步获证．证毕．

例 1　考究使不等式

$$(1-\lambda)H_{10}(a)+\lambda A_{10}(a)\geqslant G_{10}(a) \qquad a\in R_{++}^{10} \tag{14}$$

成立的实数 λ 的最小值 λ_*.

利用 Mathemantica 软件算得：$\lambda_* = 0.707\,515\cdots$. 换言之，当且仅当 $\lambda \geqslant 0.707\,515\cdots$ 时，不等式(14)成立.

3 定理 2 的证明及推论

仍然假设 λ_* 由(3) 定义. 依定理 1，我们只需证明

$$\lambda_* \leqslant \frac{t_0^{r/n}[(t_0+n-1)/n]^{1-r}}{t_0+1} \tag{15}$$

由 λ_* 的定义知，又只需证明：对任意 t $(0 < t \neq 1)$ 有

$$\frac{G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)}{A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)} \leqslant \frac{t_0^{r/n}[(t_0+n-1)/n]^{1-r}}{t_0+1} \tag{16}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)}{A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)} &= \frac{t^{r/n}-[n^{-1}\cdot(t^{-1}+n-1)]^{-r}}{[n^{-1}\cdot(t+n-1)]^r-[n^{-1}\cdot(t^{-1}+n-1)]^{-r}} \\ &= \frac{\{n^{-1}\cdot[t^{n^{-1}-1}+(n-1)t^{n^{-1}}]\}^r-1}{[n^{-2}\cdot(t+n-1)(t^{-1}+n-1)]^r-1} = \frac{f(t)}{g(t)}\end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$f(t) = \{n^{-1}\cdot[t^{n^{-1}-1}+(n-1)t^{n^{-1}}]\}^r-1,\quad g(t) = [n^{-2}(t+n-1)(t^{-1}+n-1)]^r-1$$

$$f(1) = g(1) = 0$$

$$\begin{aligned}f'(t) &= r\left\{\frac{1}{n}[t^{\frac{1}{n}-1}+(n-1)t^{\frac{1}{n}}]\right\}^{r-1}\cdot\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)t^{\frac{1}{n}-2}+\frac{n-1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\right] \\ &= \frac{r(n-1)}{n^2}t^{\frac{1}{n}-2}\left\{\frac{1}{n}[t^{\frac{1}{n}-1}+(n-1)t^{\frac{1}{n}}]\right\}^{r-1}(t-1) \\ &= \frac{r(n-1)}{n^2}t^{\frac{r}{n}-2}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}+n-1\right)\right]^{r-1}(t-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(t) &= r\left[\frac{1}{n^2}(t+n-1)\left(\frac{1}{t}+n-1\right)\right]^{r-1}\cdot\frac{n-1}{n^2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \frac{r(n-1)}{n^2}t^{-2}\left[\frac{1}{n}(t+n-1)\right]^{r-1}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t}+n-1\right)\right]^{r-1}(t+1)(t-1)\end{aligned}$$

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{t^{r/n}[(t+n-1)/n]^{1-r}}{t+1} \tag{18}$$

由柯西中值定理及(18) 知，存在 ξ 介于 t 与 1 之间$(0 < \xi \neq 1, t)$，使得

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)-f(1)}{g(t)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\xi^{r/n}[(\xi+n-1)/n]^{1-r}}{\xi+1} \tag{19}$$

记 $h(\xi) = \dfrac{\xi^{r/n}[(\xi+n-1)/n]^{1-r}}{\xi+1}$，则

$$\ln h(\xi) = \frac{r}{n}\ln\xi+(1-r)\ln\frac{\xi+n-1}{n}-\ln(\xi+1)$$

$$\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = \frac{r}{n}\,\frac{1}{\xi}+\frac{1-r}{\xi+n-1}-\frac{1}{\xi+1}$$

故有

$$\begin{aligned}n\xi(\xi+n-1)(\xi+1)\cdot\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} &= r(\xi+n-1)(\xi+1)+n(1-r)\xi(\xi+1)-n\xi(\xi+n-1) \\ &= r(1-n)\xi^2+n(2-n)\xi+r(n-1) \\ &= -r(n-1)\left[\xi^2+\frac{n(n-2)}{r(n-1)}\xi-1\right]\end{aligned}$$

$$=-r(n-1)(\xi-t_0)(\xi-t_1) \tag{20}$$

$$t_1=-\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-2)}{r(n-1)}+\sqrt{\left[\frac{n(n-2)}{r(n-1)}\right]^2+4}\right\}<0<t_0$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{n(n-2)}{r(n-1)}+\sqrt{\left[\frac{n(n-2)}{r(n-1)}\right]^2+4}\right\}\leqslant 1$$

其中 t_0，t_1 为方程(6)的根．由(20)知，当 $0<\xi<t_0$ 时，$h'(\xi)>0$，当 $\xi>t_0$ 时，$h'(\xi)<0$，故

$$\frac{G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)}{A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*)}=\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=h(\xi)\leqslant h(t_0)=\frac{t_0^{r/n}[(t_0+n-1)/n]^{1-r}}{t_0+1}$$

这就证明了不等式(16)和(2)．由以上证明可知：不等式(2)取等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$．证毕．

对不等式(2)两端 $1/r$ 方，并令 $r\to 0$，依定理 2 立得

推论 1　如果 $a\in R_{++}^n$，$n\geqslant 2$，那么当且仅当实数 $\lambda\geqslant 1-n^{-1}$ 时有

$$[H_n(a)]^{1-\lambda}[A_n(a)]^{\lambda}\geqslant G_n(a) \tag{21}$$

在推论 1 中，以 a_i^{-1} 代 a_i（$i=1,\cdots,n$），以 $1-\lambda$ 代 λ，并对(21)两端取倒数，立得：

推论 2　如果 $a\in R_{++}^n$，$n\geqslant 2$，那么当且仅当实数 $\lambda\leqslant n^{-1}$ 时有

$$[H_n(a)]^{1-\lambda}[A_n(a)]^{\lambda}\leqslant G_n(a) \tag{22}$$

注 1　上述两个推论是文献[4]的主要结果．

4　定理 3 的证明

由 $r\geqslant 1$ 及加权幂平均不等式知

$$(1-\lambda)H_n^r(a)+\lambda A_n^r(a)\geqslant[(1-\lambda)H_n(a)+\lambda A_n(a)]^r$$

所以我们只需证明

$$(1-\lambda)H_n(a)+\lambda A_n(a)\geqslant G_n(a) \tag{23}$$

下面，我们采用李广兴方法[9-11]来完成不等式(23)的证明．不妨假设

$$0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant a_n \tag{24}$$

引入如下记号：

$$[a]_k=(a_k,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots,a_n)\qquad 1\leqslant k\leqslant n-1$$

$$F(a)=(1-\lambda)H_n(a)+\lambda A_n(a)-G_n(a)$$

则有

$$H_n([a]_k)=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{k}{a_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]^{-1}\qquad \frac{\partial H_n([a]_k)}{\partial a_k}=\frac{k}{n}H_n^2([a]_k)\cdot a_k^{-2}$$

$$A_n([a]_k)=\frac{1}{n}\left(ka_k+\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)\qquad \frac{\partial A([a]_k)}{\partial a_k}=\frac{k}{n}$$

$$G_n([a]_k)=\sqrt[n]{a_k^k\prod_{i=k+1}^{n}a_i}\qquad \frac{\partial G([a]_k)}{\partial a_k}=\frac{k}{n}G_n([a]_k)\cdot a_k^{-1}$$

$$\frac{\partial F([a]_k)}{\partial a_k}=\frac{k}{n}[(1-\lambda)H_n^2([a]_k)\cdot a_k^{-2}-G_n([a]_k)\cdot a_k^{-1}+\lambda] \tag{25}$$

往证

$$\frac{\partial F([a]_k)}{\partial a_k}\leqslant 0\qquad 1\leqslant k\leqslant n-1 \tag{26}$$

记 $a_k^*=\sqrt[n-k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_n}$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$，则由 A-G 不等式有

$$H_n([a]_k)=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{k}{a_k}+\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]^{-1}\leqslant\left[\frac{1}{n}\left(\frac{k}{a_k}+\frac{n-k}{a_k^*}\right)\right]^{-1} \tag{27}$$

记 $t=\dfrac{a_k}{a_k^*}$，$f_1(t)=(1-\lambda)\left\{\dfrac{1}{n}[k+(n-k)t]\right\}^{-2}-t^{-\frac{n-k}{n}}+\lambda$，则由(24)知，$0<t\leqslant 1$．再由式(25)，(27)得

$$\frac{\partial F([a]_k)}{\partial a_k} \leqslant \frac{k}{n}\left\{(1-\lambda)\left[\frac{1}{n}\left(\frac{k}{a_k}+\frac{n-k}{a_k^*}\right)\right]^{-2} a_k^{-2}-\left(a_k^k \cdot a_k^{*\,n-k}\right)^{\frac{1}{n}} a_k^{-1}+\lambda\right\}=\frac{k}{n} f_1(t) \tag{28}$$

$$f'_1(t)=\frac{n-k}{n}\left\{-2(1-\lambda)\left[\frac{1}{n}(k+(n-k)t)\right]^{-3}+t^{\frac{k}{n}-2}\right\} \tag{29}$$

记

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \ln t^{\frac{k}{n}-2}-\ln\left\{2(1-\lambda)\left[\frac{1}{n}(k+(n-k)t)\right]^{-3}\right\} \\ &= \left(\frac{k}{n}-2\right)\ln t+3\ln\left\{\frac{1}{n}[k+(n-k)t]\right\}-\ln[2(1-\lambda)] \end{aligned}$$

则显见有 $f'_1(t) \cdot f_2(t) \geqslant 0$，即 $f'_1(t)$，$f_2(t)$ 的符号相同. 注意到

$$f'_2(t)=\left(\frac{k}{n}-2\right)\frac{1}{t}+\frac{3(n-k)}{k+(n-k)t}=\frac{n^2-k^2}{nt[k+(n-k)t]}\left[t-\frac{k(2n-k)}{n^2-k^2}\right] \tag{30}$$

下证 $\lambda \geqslant 1/2$. 由假设(7)知，只需证明

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n+1}\right)^3\left(\frac{2n-1}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n}-2} \geqslant \frac{1}{2}$$

即

$$\left(\frac{3}{n+1}\right)^3 \cdot \left(\frac{2n-1}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n}-2} \leqslant 1 \tag{31}$$

令 $\omega=\dfrac{n+1}{3} \geqslant 1$，则(31)等价于

$$\begin{aligned} &\omega^3\left(\frac{6\omega-3}{9\omega^2-6\omega}\right)^{2-\frac{1}{3\omega-1}} \geqslant 1 \qquad \omega^{3(3\omega-1)}\left(\frac{2\omega-1}{3\omega^2-2\omega}\right)^{6\omega-3} \geqslant 1 \\ &\omega^{\omega}\left(\frac{2\omega-1}{3\omega-2}\right)^{2\omega-1} \geqslant 1 \qquad \omega\left(1+\frac{1-\omega}{3\omega-2}\right)^{2-\frac{1}{\omega}} \geqslant 1 \end{aligned} \tag{32}$$

由 $2-\dfrac{1}{\omega} \geqslant 1$ 及 Bernoulli 不等式[12] 知

$$\omega\left(1+\frac{1-\omega}{3\omega-2}\right)^{2-\frac{1}{\omega}} \geqslant \omega\left[1+\left(2-\frac{1}{\omega}\right)\frac{1-\omega}{3\omega-2}\right]=1+\frac{(\omega-1)^2}{3\omega-2} \geqslant 1$$

故(32)成立，$\lambda \geqslant 1/2$ 成立.

如果 $2k \geqslant n$，那么由 $\lambda \geqslant 1/2$ 知

$$\frac{k(2n-k)}{n^2-k^2} \geqslant 1 \qquad f'_2(t) \leqslant 0 \qquad f_2(t) \geqslant f_2(1)=-\ln[2(1-\lambda)] \geqslant 0$$

故

$$f_2(t) \geqslant 0 \tag{33}$$

如果 $2k<n$，那么 $0<\dfrac{k(2n-k)}{n^2-k^2}<1$. 记 $u=\dfrac{k}{n}$，则 $\dfrac{1}{n} \leqslant u<\dfrac{1}{2}$，且

$$\begin{aligned} f_2(t) &\geqslant f_2\left(\frac{k(2n-k)}{n^2-k^2}\right)=\left(\frac{k}{n}-2\right)\ln\frac{k(2n-k)}{(n-k)(n+k)}+3\ln\left\{\frac{1}{n}\left[k+\frac{k(2n-k)}{n+k}\right]\right\}-\ln[2(1-\lambda)] \\ &=(u-2)[\ln u+\ln(2-u)-\ln(1-u)-\ln(1+u)]+3[3\ln(3u)-\ln(1+u)]-\ln[2(1-\lambda)] \\ &=f_3(u) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} f'_3(u) &= \ln u+\ln(2-u)-\ln(1-u)-\ln(1+u)+(u-2)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2-u}+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)+3\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right) \\ &= \ln u+\ln(2-u)-\ln(1-u)-\ln(1+u)+\frac{1}{u}-\frac{1}{1-u} \end{aligned} \tag{35}$$

$$f''_3(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{2-u}+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{(1-u)^2}=\frac{u-1}{u^2}-\frac{1}{2-u}-\frac{1}{1+u}-\frac{u}{(1-u)^2}<0$$

所以，$f'_3(u)>f'_3\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$f_3(u)$ 关于 u 递增. 故由不等式(7)有

$$f_3(u) \geqslant f_3\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}-2\right)\ln\frac{2n-1}{(n-1)(n+1)}+3\ln\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{2n-1}{n+1}\right)\right]-\ln[2(1-\lambda)]$$

$$=\ln\left[\left(\frac{3}{n+1}\right)^3\left(\frac{2n-1}{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n}-2}\right]-\ln[2(1-\lambda)]\geqslant 0 \tag{36}$$

由(34)式，(36)式知，此时不等式(33)仍成立.

由 $f'_1(t)\cdot f_2(t)\geqslant 0$，(33)知，$f'_1(t)\geqslant 0$，$f_1(t)$ 在区间$(0,1]$递增，$f_1(t)\leqslant f_1(1)=0$. 再由不等式(28)得(26)，故 $F([a]_k)$ 关于 a_k 递减. 于是由优化假设(24)知

$$F([a]_k)=F(a_k,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots,a_n)\geqslant F(a_{k+1},\cdots,a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n)=F([a]_{k+1})$$

$$F(a)=F([a]_1)\geqslant\cdots\geqslant F([a]_k)\geqslant F([a]_{k+1})\geqslant\cdots\geqslant F([a]_n)=0$$

$F(a)\geqslant 0$. 由 $F(a)$ 的定义知，不等式(2)成立.

由以上证明可知，(2)取等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$. 证毕.

参考文献：

[1] Pečaric J E, Wen Jia-jin, Wan-lan Wang, Lu Tao. A Generalization of Maclaurin's Inequalities and its Applications [J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2005, 8(4): 583－598.

[2] 王挽澜，文家金，石焕南. 幂平均不等式的最优值 [J]. 数学学报，2004，47(6)，1053－1062.

[3] Wen Jiajin, Wang Wan-lan. The Optimizations for the Inequalities of Power Means [J]. Joural of Inequalities and Applications, 2006, [卷(期)号不详]: 1－25.

[4] 文家金. A-G-H 不等式的优化推广及其应用 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2004，(专辑)：12－16.

[5] Bullen P S, Mitrinnovic D S, Vasic P M. Means and Their Inequalities [M]. Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo: Reidel, 1988.

[6] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 第 3 版. 济南：山东科学技术出版社，2004.

[7] 罗　钊，赖　立，文家金. 对称函数的全局优化的降维算法 [J]. 成都大学学报(自然科学版)，2002，21(1)：5－11.

[8] 文家金，萧昌建，张日新. 一类齐次对称多项式上的切比雪夫不等式 [J]. 数学杂志，2003，23(4)：431－436.

[9] Wen jiajin, Wang Wanlan, Lu Yingjin. The Method of Descending Dimension for Establishing In-Equalities(I) [J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2003，29(5)：527－532.

[10] 陈　计，王　振. 一个分析不等式的证明 [J]. 宁波大学学报(理工版)，1992，(2)：12－14.

[11] Zhang Ri-xin, Wang Wan-lan, Wen Jia-jin. A Class of Reverse Jensen Inequalities [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(5)：744－748.

[12] 文家金，罗　钊. Bernoulli 不等式的优化推广及其应用 [J]. 成都大学学报(自然科学版)，2001，20(4)：1－8.

On the Optimal Values for A-G-H Inequalities

WEN Jia-jin,　ZHANG　Yong

College of Mathematics and Information Science, Chengdu University, Chengdu 610106, China

Abstract: By means of the method of descending dimension, the authors prove the smallest number λ such that the inequality $(1-\lambda)H_n^r(a)+\lambda A_n^r(a)\geqslant G_n^r(a)$ holds is

$$\lambda_*=\sup_{0<t\neq 1}\{(G_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))/(A_n^r(a_*)-H_n^r(a_*))\mid a_*=(t,1,\cdots,1)\in R_{++}^n,\ t\neq 1\}$$

where $r>0$ is a real number, and $A_n(a)$, $G_n(a)$ and $H_n(a)$ are the arithmetic, the geometric and the harmonic means of n positive real numbers a_1, Λ, a_n, respectively.

Key words: power mean; A-G-H inequalities; optimal values; method of descending dimension

责任编辑　覃吉康