第 32 卷　第 1 期　　　西南师范大学学报（自然科学版）　　　2007 年 2 月
Vol. 32　No. 1　　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science)　　　Feb.　2007

文章编号： 1000－5471(2007)01－0019－03

关于一类微分方程的解析解问题①

赵 杰 民

北京联合大学 基础部，北京 100101

摘要： 对一类非线性微分方程的解求得一致有效渐近展开式，并给出了共振解的近似解析解公式.

关　键　词： 微分方程；非线性；解析解

中图分类号：O175　　　**文献标识码：A**

对无时滞的 Van der Pol 二阶振动方程

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \varepsilon(1 - x^2(t))\dot{x}(t) \tag{1}$$

文献[1]给出了一次近似解析解

$$x = 2A[A^2 + (4 - A^2)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}]^{-\frac{1}{2}}\cos t \tag{2}$$

文献[2－6]也对一些有时滞或无时滞的二阶振动方程给出了近似解析解. 本文对更加一般化的、受小粘性阻尼作用的、一般力影响下的非线性二阶振动方程

$$\ddot{x}(t) + 2\varepsilon\mu\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(x(t), \dot{x}(t), x(t-r), \dot{x}(t-r)) + E(\Omega t) \tag{3}$$

求得一致有效渐近展开式，分别就主共振和次共振情形给出了相当简洁的近似解析解公式. 应用这些公式，大量的二阶振动方程的共振问题可方便的得到近似解析解以及振幅、频率、周期和相位等.

文中 ε 为小参数，μ 是非负常量，$r \geqslant 0$ 为常滞量，εr 是小量，$E(\Omega t)$ 是关于 t 的周期为 $2\pi/\Omega$ 的外激励. 我们考虑软激励 $E(\Omega t) = \varepsilon E_1(\Omega t)$，$E_1 \in C^1$ 的情形，f 是解析函数.

1　分　　析

用多尺度法求方程(3)解的一致有效渐近展开式：

$$x(t;\varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \cdots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \cdots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \cdots) + \cdots \tag{4}$$

其中 $T_n = \varepsilon^n t$，$n = 0,1,2,\cdots$. 将 $x_n(T_0, T_1, T_2, \cdots)$，$x_n(T_0 - r, T_1 - \varepsilon r, T_2 - \varepsilon^2 r, \cdots)$，$x(t)$，$\dot{x}(t)$，$x(t-r)$ 和 $\dot{x}(t-r)$ 分别简记成 x_n，x_{nr}，x，$\dot{x}$，x_r 和 $\dot{x}_r$，并记 $D_n = \partial/\partial T_n$，将(4)式代入(3)式，并将 f 在 $\varepsilon = 0$ 处展成 ε 的幂级数，比较 ε 的同次幂的系数，便得到各阶近似方程

$$\varepsilon^0: D_0^2 x_0 + \omega^2 x_0 = 0 \tag{5}$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + f(x_0, D_0 x_0, x_{0r}, D_0 x_{0r}) + E_1(\Omega t) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2: D_0^2 x_2 + \omega^2 x_2 = &-2D_0 D_1 x_1 - 2\mu D_0 x_1 - D_1^2 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 + \\ &x_1 \frac{\partial f(x_0, D_0 x_0, x_{0r}, D_0 x_{0r})}{\partial x} + (D_0 x_1 + D_1 x_0) \times \\ &\frac{\partial f(x_0, D_0 x_0, x_{0r}, D_0 x_{0r})}{\partial \dot{x}} + x_{1r} \frac{\partial f(x_0, D_0 x_0, x_{0r}, D_0 x_{0r})}{\partial x_r} +\end{aligned}$$

---

①　收稿日期：2006－02－17
基金项目：国家自然科学基金资助项目(40474033).
作者简介：赵杰民(1959－)，男，浙江金华人，教授，博士，主要从事差分微分方程的研究.

$$(D_0 x_{1r} + D_1 x_{0r}) \times \frac{\partial f(x_0, D_0 x_0, x_{0r}, D_0 x_{0r})}{\partial \dot{x}_r} \tag{7}$$

$$\vdots$$

1.1 主共振 $\Omega \approx \omega$ 的情形

引进解谐参数 σ：$\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$，方程(5) 的解为

$$x_0 = \alpha(T_1, T_2, \cdots)\cos(\omega T_0 + \beta(T_1, T_2, \cdots)) \tag{8}$$

其中 $\alpha(T_1, T_2, \cdots)$ 和 $\beta(T_1, T_2, \cdots)$ 为 $T_1, T_2, \cdots$ 的待定函数. 将 $\alpha(T_1 - \varepsilon r, T_2 - \varepsilon^2 r, \cdots)$ 与 $\beta(T_1 - \varepsilon r, T_2 - \varepsilon^2 r, \cdots)$ 分别简记成 α_r 与 β_r，把式(8) 代入式(6) 中，得到：

$$\begin{aligned} D_0{}^2 x_1 + \omega^2 x_1 = {} & 2\omega(D_1\alpha)\sin(\omega T_0 + \beta) + 2\omega\alpha(D_1\beta)\cos(\omega T_0 + \beta) + 2\omega\mu\alpha\sin(\omega T_0 + \beta) + \frac{a_0}{2} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega T_0 - n\omega r + n\beta_r) + b_n\sin(n\omega T_0 - n\omega r + n\beta_r)] + \frac{\tilde{a}_0}{2} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{a}_n\cos(n\omega T_0 - n\omega r + n\beta_r) + \tilde{b}_n\sin(n\omega T_0 - n\omega r + n\beta_r)] \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos(\theta + \beta + \omega r - \beta_r), -\omega\alpha\sin(\theta + \beta + \omega r - \beta_r), \alpha_r\cos\theta - \omega\alpha_r\sin\theta) \times \cos n\theta \mathrm{d}\theta \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos(\theta + \beta + \omega r - \beta_r), -\omega\alpha\sin(\theta + \beta + \omega r - \beta_r), \alpha_r\cos\theta - \omega\alpha_r\sin\theta) \times \sin n\theta \mathrm{d}\theta \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{11}$$

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E_1(\theta + \sigma T_1 + \omega r - \beta_r) \times \cos n\theta \mathrm{d}\theta \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{12}$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} E_1(\theta + \sigma T_1 + \omega r - \beta_r) \times \sin n\theta \mathrm{d}\theta \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13}$$

令方程中产生长期项的部分等于零，若求一次近似解析解，α 与 β 只看作 T_1 的函数，引进变换 $\gamma = \sigma T_1 - \beta$，则 $\alpha(T_1)$ 和 $\gamma(T_1)$ 可表为[5-8]：

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(\alpha\cos(\theta + \omega r), -\omega\alpha\sin(\theta + \omega r), \alpha\cos\theta, -\omega\alpha\sin\theta) + E_1(\theta + \gamma + \omega r)] \times \sin(\theta + \omega r)\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

$$\alpha\gamma' = \sigma\alpha + \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(\alpha\cos(\theta + \omega r), -\omega\alpha\sin(\theta + \omega r), \alpha\cos\theta, -\omega\alpha\sin\theta) + E_1(\theta + \gamma + \omega r)] \times \cos(\theta + \omega r)\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

这时方程(3) 解的一次近似解析解为：$x = \alpha\cos(\Omega t - \gamma)$.

1.2 次共振 $\Omega \approx 0$ 的情形

引进解谐参数 σ：$\Omega = \varepsilon\sigma$，若求一次近似解析解，则振幅 $\alpha(T_1)$ 和相位 $\beta(T_1)$ 可表为[5-8]

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos(\theta + \omega r), -\omega\alpha\sin(\theta + \omega r), \alpha\cos\theta, -\omega\alpha\sin\theta) \times \sin(\theta + \omega r)\mathrm{d}\theta \tag{16}$$

$$\alpha\beta' = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos(\theta + \omega r), -\omega\alpha\sin(\theta + \omega r), \alpha\cos\theta, -\omega\alpha\sin\theta) \times \cos(\theta + \omega r)\mathrm{d}\theta \tag{17}$$

这时方程(3) 解的一次近似解析解为：$x = \alpha\cos(\omega t + \beta)$.

2 结 论

综上所述，我们便得到下面的定理 1 和定理 2.

定理 1 对主共振 $\Omega \approx \omega$ 的情形，方程(3) 的一次近似解析解为：

$$x = \alpha\cos(\Omega t - \gamma)$$

式中 $\alpha(T_1)$ 与 $\gamma(T_1)$ 分别由式(14) 与(15) 给出，其中相位 $\beta = \sigma T_1 - \gamma$.

定理 2 对次共振 $\Omega \approx 0$ 的情形，方程(3) 的一次近似解析解为：

$$x = \alpha\cos(\omega t + \beta)$$

式中振幅 $\alpha(T_1)$ 和相位 $\beta(T_1)$ 分别由式(16) 与(17) 给出.

注 1　文献[1]的结论是本文结果的简单推论．事实上，只要在本文方程(3)中取

$$f=[1-x^2(t)]\dot{x}(t)\qquad \omega=1\qquad r=0\qquad \mu=0\qquad E=0\qquad \sigma=0$$

则由定理 1 容易得到(2)式．

注 2　文献[4]的结论是本文结果的简单推论．事实上，只要在本文方程(3)中取

$$f=\dot{x}(t)-\frac{1}{3}[\dot{x}(t)]^3\qquad \mu=0\qquad E_1(\Omega t)=k\cos\Omega t$$

则由定理 1 容易得到文[4]的公式(4.3.9)和(4.3.12)．

注 3　文献[6]的结论是本文结果的简单推论．事实上，只要在本文方程(3)中取 $\mu=0$，则由定理 1 和定理 2 即得文献[6]的结论．

还有一些文章的研究结论是本文结果的简单推论，在此不一一列举．

参考文献：

[1] Ronald E, Mickens. An Introduce to Nonlinear Oscillations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 114－115.

[2] Yoshitake Y, Inoue J, Sueoka A. Vibrations of a Forced Self-excited Systems with Time lag [J]. Bull JSME, 1983, 26 (221): 1943－1951.

[3] Minorsky N. Nonlinear Oscillations [M]. Princeton: D Nan Nostrand Comp Inc, 1962.

[4] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. [出版地不详]: John Wiley & Sons, 1979.

[5] 赵杰民．时滞系统的振动、稳定性和周期运动研究 [D]．北京：北京航空航天大学，1994：7－12．

[6] 赵杰民．一类非线性微分差分方程的近似解 [J]．数学研究与评论．2001，21(2)：247－251．

[7] Zhao Jiemin. Qualitative Analysis for A Class of Nonlinear Differential Equations [J]. Annals of Differential Equations, 2003, 19(3): 453－457.

[8] 赵杰民，黄克累，陆启韶．一类带有时滞的动力系统的几个定理与应用 [J]．应用数学学报，1995，18(3)：422－428．

On the Analytic Solution Problems for A Class of Differential Equations

ZHAO Jie-min

Dept. of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing 100101, China

Abstract: Nonlinear time-delay differential equations are studied. This paper gets a uniformly valid asymptotic expansion according to the distinct circumstances of primary and subharmonic resonances and also gives some approximate analytic formulas which are very simple and explicit.

Key words: differential equation; nonlinear; analytic solution

责任编辑　覃吉康