文章编号：1000-5471(2007)01-0015-04

耗散型脉冲微分方程初值问题解的存在唯一性[①]

秦丽娟， 张玲忠

甘肃农业大学 理学院，兰州 730070

摘要：在耗散型条件下，运用近似解的存在性定理获得了无穷区间上一阶脉冲初值问题解的存在唯一性结果.

关 键 词：脉冲微分方程；初值问题；近似解

中图分类号：O175.25 **文献标识码**：A

设 H 为 Hilbert 空间，其内积由 $\langle\cdot\rangle$ 表示，考虑 H 中一阶脉冲微分方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & t \in J, t \neq t_k \\ \Delta u\mid_{t=t_k} = I_k(u(t_k)) & k = 1,2,\cdots \\ u(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性，这里 f：$J \times H \longrightarrow H$ 连续，$J = [0, +\infty)$，$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$，$t_k \to \infty (k \to \infty)$，$x_0 \in H$，$I_k$：$H \longrightarrow H$ $(k = 1,2,\cdots)$. $\Delta u\mid_{t=t_k}$ 表示 $u(t)$ 在 $t = t_k$ 处的跃度，也就是

$$\Delta u\mid_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-)$$

$u(t_k^+)$,$u(t_k^-)$ 分别表示 $u(t)$ 在 $t = t_k$ 处的右、左极限($k = 1,2,\cdots$). 记 $PC(J, H) = \{u$：$J \longrightarrow H$ 在 $t \neq t_k$ 处连续，在 $t = t_k$ 处左连续，其右极限 $u(t_k^+)$ 存在，$k = 1, 2, \cdots\}$. $u \in PC(J, H) \cap C'(J', H)$ 为初值问题(1) 的解，如果它满足(1) 式.

文献[1,2] 对耗散型条件下非脉冲微分方程初值问题进行了研究. 本文运用近似解的存在性定理，先讨论了无穷区间上非脉冲初值问题在耗散型条件下唯一解的整体存在性，然后将其结果逐段应用到脉冲微分方程初值问题，得到了其解的存在唯一性.

引理 1 设 H 为实 Hilbert 空间，$u \in C'([a, b], H)$，则 $\| u(t) \|^2 \in C'(a, b)$，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u(t) \|^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

证 对 $\forall t \in [a, b]$，取 Δt 充分小，有

$$\frac{\| u(t+\Delta t) \|^2 - \| u(t) \|^2}{\Delta t} = \frac{\langle u(t+\Delta t), u(t+\Delta t)\rangle - \langle u(t), u(t)\rangle}{\Delta t}$$

$$= \frac{\langle u(t+\Delta t), u(t+\Delta t)\rangle - \langle u(t), u(t+\Delta t)\rangle}{\Delta t} + \frac{\langle u(t), u(t+\Delta t)\rangle - \langle u(t), u(t)\rangle}{\Delta t}$$

$$= \langle \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}, u(t+\Delta t)\rangle + \langle u(t), \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}\rangle$$

因为 $u \in C'([a, b], H)$，所以 $\| u(t) \|^2 \in C'(a, b)$.

令 $\Delta t \to 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u(t) \|^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

① 收稿日期：2005-12-12

作者简介：秦丽娟(1979-)，女，甘肃永昌人，硕士，助教，主要从事非线性常微分方程的研究.

先考虑 H 中一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)) & t\in[t_0,+\infty),\ t_0\geqslant 0 \\ u(t_0)=\bar{x} \end{cases} \tag{2}$$

解的存在唯一性，这里 $f:[t_0,+\infty)\times H\longrightarrow H$ 连续，$\bar{x}\in H$.

定理1 设 $f:[t_0,+\infty)\times H\longrightarrow H$ 连续，且满足下列条件：

(P1) 存在常数 $L>0$，对 $\forall x_1,x_2\in H$，有

$$\langle f(t,x_2)-f(t,x_1),x_2-x_1\rangle\leqslant L\|x_2-x_1\|^2$$

(P2) 存在 $h\in C([0,+\infty),(0,+\infty))$，使得 $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}r}{h(r)}=+\infty$ 时，有

$$\langle f(t,x),x\rangle\leqslant h(\|x\|^2)\qquad\forall t\geqslant t_0,\ x\in H$$

则初值问题(2)在 $[t_0,+\infty)$ 上存在唯一解.

证 由 f 的连续性知，存在 $\delta>0$，使得 f 在 $[t_0,t_0+\delta]\times\bar{B}(\bar{x},\delta)$ 上有界. 所以，存在常数 $M>0$，使得

$$\|f(t,u)\|\leqslant M\qquad\forall(t,u)\in[t_0,t_0+\delta]\times\bar{B}(\bar{x},\delta)$$

取 $h=\min\left\{\delta,\frac{\delta}{M}\right\}$. 因此由近似解的存在性定理[1]，对 $\forall n\in N$，初值问题(2)存在 $\frac{1}{n}$-近似解 $u_n(t)$

$$\begin{cases} u_n'(t)=f(t,u_n(t))+y_n(t) & u_n(t_0)=\bar{x} \\ \|y_n(t)\|\leqslant\frac{1}{n} & t\in[t_0,t_0+h_n] \end{cases} \tag{3}$$

这里 $h_n=\min\left\{\delta,\frac{\delta}{M+\frac{1}{n}}\right\}$.

任取 $0<h'<h$，取 $m>n$ 充分大，使 $h_m,h_n>h'$，则在 $[t_0,t_0+h']$ 上有

$$u_m{}'(t)-u_n{}'(t)=f(t,u_m(t))-f(t,u_n(t))+y_m(t)-y_n(t) \tag{4}$$

将(4)式两边与 $u_m(t)-u_n(t)$ 作内积，由引理1并结合条件(P1)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant L\|u_m(t)-u_n(t)\|^2+\langle y_m(t)-y_n(t),u_m(t)-u_n(t)\rangle \tag{5}$$

由(3)式及内积的性质有

$$\begin{aligned} &|\langle y_m(t)-y_n(t),u_m(t)-u_n(t)\rangle|\leqslant\|y_m(t)-y_n(t)\|\cdot\|u_m(t)-u_n(t)\| \\ &=2\cdot\frac{\|y_m(t)-y_n(t)\|}{2}\cdot\|u_m(t)-u_n(t)\| \\ &\leqslant 2\cdot\frac{\left(\frac{\|y_m(t)-y_n(t)\|}{2}\right)^2+\|u_m(t)-u_n(t)\|^2}{2} \\ &\leqslant\left(\frac{\|y_m(t)\|+\|y_n(t)\|}{2}\right)^2+\|u_m(t)-u_n(t)\|^2 \\ &\leqslant\left(\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}\right)^2+\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant\|u_m(t)-u_n(t)\|^2+\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

因此(5)式可变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant(L+1)\|u_m(t)-u_n(t)\|^2+\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2-2(L+1)\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant\frac{2}{n^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-2(L+1)(t-t_0)}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2)\leqslant\frac{2}{n^2}\mathrm{e}^{-2(L+1)(t-t_0)}\leqslant\frac{2}{n^2} \tag{6}$$

从 t_0 到 t 积分(6)式，考虑到 $u_m(t_0)=u_n(t_0)=\bar{x}$，即 $u_m(t_0)-u_n(t_0)=0$，有

$$e^{-2(L+1)(t-t_0)}\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant\frac{2}{n^2}(t-t_0)$$

所以
$$\|u_m(t)-u_n(t)\|^2\leqslant\frac{2}{n^2}(t-t_0)e^{2(L+1)(t-t_0)}\leqslant\frac{2}{n^2}he^{2(L+1)h}\to 0\qquad m,n\to\infty\tag{7}$$

从而$\{u_n(t)\}$关于$t\in[t_0,t_0+h]$在一致连续意义下是基本列，故存在$[t_0,t_0+h]$上的连续函数$u(t)$，使

$$u_n(t)\to u(t)\qquad n\to\infty$$

所以$u(t)$是初值问题(2)在$[t_0,t_0+h]$上的解.

再证唯一性：设$u(t)$和$v(t)$是初值问题(2)的两个不同的解，令$w(t)=u(t)-v(t)$，则由引理1及条件(P1)，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2=\langle w'(t),w(t)\rangle\leqslant L\|w(t)\|^2$$

即
$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2-2L\|w(t)\|^2\leqslant 0$$

$$(e^{-2Lt}\|w(t)\|^2)'\leqslant 0\tag{8}$$

从t_0到t积分(8)式，并注意到$w(t_0)=0$，有$e^{-2Lt}\|w(t)\|^2\leqslant 0$，所以$w(t)\equiv 0$，即$u(t)\equiv v(t)$. 因此初值问题(2)在$[t_0,t_0+h]$上存在唯一解，由延拓定理，这个解可延拓成一个饱和解.

设$u(t)$是初值问题(2)的唯一饱和解，$[t_0,T)$是其最大存在区间. 若$T<+\infty$，下证$\lim\limits_{t\to T^-}u(t)$存在.

由于$u(t)$在$[t_0,T)$上满足微分方程(2)，将方程两边与$u(t)$作内积，有

$$\langle u'(t),u(t)\rangle=\langle f(t,u(t)),u(t)\rangle$$

由引理1及条件(P2)有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2=\langle u'(t),u(t)\rangle\leqslant h(\|u(t)\|^2)$$

所以
$$\frac{\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2}{h(\|u(t)\|^2)}\leqslant 2\tag{9}$$

从t_0到t积分(9)式，有

$$\int_{t_0}^{t}\frac{(\|u(\tau)\|^2)'}{h(\|u(\tau)\|^2)}d\tau\leqslant 2(t-t_0)$$

$$\int_{\|\bar{x}\|^2}^{\|u(t)\|^2}\frac{dr}{h(r)}\leqslant 2(t-t_0)<2(T-t_0)<+\infty\tag{10}$$

结合条件(P2)知，$u(t)$在$[t_0,T)$上有界. 所以，存在$R>0$，使得

$$\|u(t)\|^2\leqslant R\qquad\forall t\in[t_0,T)$$

令$M_0=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant R}h(r)$，对$\forall t_1,t_2\in[t_0,T)$，$t_1<t_2$，有

$$\|u(t_2)-u(t_1)\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|f(s,u(s))\|ds\leqslant\int_{t_1}^{t_2}h(\|u(t)\|^2)dt\leqslant M_0(t_2-t_1)$$

故$\lim\limits_{t\to T^-}u(t)$存在. 由延拓定理，$u(t)$可延拓为更大区间，矛盾. 所以$T=+\infty$. 因此初值问题(2)的唯一解$u(t)$在$[t_0,+\infty)$上整体存在. 定理证毕.

由定理1可得出一阶脉冲初值问题(1)的解的存在唯一性结果.

定理2　设H为Hilbert空间，$f:J\times H\longrightarrow H$连续，$I_k:H\longrightarrow H(k=1,2,\cdots)$. 若$f$满足条件(P1)与(P2)，则一阶脉冲初值问题(1)存在唯一解.

证　当$t\in J_0=[0,t_1]$时，由定理1，初值问题

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t)) & t\in J_0\\ u(0)=x_0\end{cases}$$

在$[0,t_1]$上存在唯一解，记作$u_0(t)$. 同理，初值问题

$$\begin{cases}u'(t)=f(t,u(t)) & t\in J_1\\ u(t_1^+)=u_0(t_1)+I_1(u_0(t_1))\end{cases}$$

在$(t_1, t_2]$上存在唯一解$u_1(t)$. 继续作下去，类似地，初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in J_k \\ u(t_k^+) = u_{k-1}(t_k) + I_k(u_{k-1}(t_k)) \qquad k = 2,3,\cdots \end{cases}$$

在$(t_k, t_{k+1}]$上存在唯一解$u_k(t)$ $(k = 2,3,\cdots)$.

令

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & t \in [0, t_1] \\ u_1(t) & t \in (t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ u_k(t) & t \in (t_k, t_{k+1}],\ k = 2,3,\cdots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

易见$u(t) \in PC(J, H) \cap C'(J', H)$满足(1)并且唯一，所以$u(t)$是(1)的唯一解.

参考文献：

[1] Martin Jr R H. Differential Equations on Closed Subsets of a Banach Space [J]. Trans Amer Math Soc, 1973, 17: 399-414.

[2] Deimling K. On Existence and Uniqueness for Differential Equations [J]. Ann Mat Pura Appl, 1975, 106: 1-12.

[3] 郭大均，孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1989.

[4] 谢胜利，杨志林. Banach空间非线性脉冲Volterra型积分方程和积分-微分方程的可解性 [J]. 数学学报，2003，46(3)：445-452.

[5] Liu Lishan, Wu Congxin, Guo Fei. A Unique Solution of Initial Value Problems for First-Order Impulsive Integro-Differential Equations of Mixed Type in Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 2002, 275: 369-385.

[6] 郭大均，孙经先. 非线性常微分方程泛函方法 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1995.

The Uniqueness Results of the Initial Value Problems for Dissipative and Impulsive Differential Equations

QIN Li-juan, ZHANG Ling-zhong

College of Science, Gansu Agriculture University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Under the dissipative conditions, the uniqueness results of initial value problems for first-order impulsive equations are obtained by using the theorem about the existence of approximate solution on infinite interval.

Key words: impulsive differential equation; initial value problems; approximate solution

责任编辑 覃吉康