文章编号: 1673-9868(2014)4-0070-05

乘积 FC-度量空间中的极大元集的性质及其对广义混合向量拟平衡问题系统的应用①

文 开 庭

毕节学院 土木建筑工程学院, 贵州 毕节 551700

摘要: 研究了乘积 FC-度量空间中的极大元集的性质, 作为应用, 获得了广义混合向量拟平衡问题系统的解集性质. 我们的结论统一、改进和推广了一些近期文献的已知结果.

关　键　词: FC-度量空间; 极大元; 广义混合向量拟平衡问题系统; 解; 转移紧开(闭)

中图分类号: O177.91　　**文献标志码:** A

2007 年, 文献[1]引入研究了如下的广义混合向量拟平衡问题系统(简记为 SGMVQEP): 设 I 为任意指标集, $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{D_i\}_{i\in I}$, $\{E_i\}_{i\in I}$ 为拓扑空间簇, $\{Z_i\}_{i\in I}$ 为拓扑向量空间簇. $\forall i\in I$, $A_i: X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{X_i}$, $C_i: X\to 2^{Z_i}$, $F_i: X\times X_i\to 2^{Z_i}$, $G_i: D_i\times E_i\times X_i\to 2^{Z_i}$, $S_i: X\to 2^{E_i}$, $T_i: X\to 2^{D_i}$ 为集值映射, 则 SGMVQEP 需求 $\hat{x}\in X$, 使得 $\forall i\in I$, 存在 $\hat{d}_i\in T_i(\hat{x})$, $\hat{e}_i\in S_i(\hat{x})$ 满足 $\hat{x}_i=\pi_i(\hat{x})\in A_i(\hat{x})$, $F_i(\hat{x}, y_i)+G_i(\hat{d}_i, \hat{e}_i, y_i)\not\subset C_i(\hat{x})$, $\forall y_i\in A_i(\hat{x})$, 并称 $\hat{x}\in X$ 为 SGMVQEP 的解. 其中, π_i 为 X 到 X_i 上的投影. SGMVQEP 包含了广义向量拟平衡问题系统、广义混合向量拟变分不等式问题、拟平衡问题、广义向量平衡问题等作为特例.

2005 年, 文献[2]引入了 FC-空间, 建立了乘积 FC-度量空间中的极大元定理及抽象经济平衡存在定理. 2010 年, 文献[3-4]获得了 FC-空间中的 GRKKM 定理、不动点定理、变分不等式、抽象经济平衡存在定理等, 文献[5-6]引入了 FC-度量空间, 建立了 FC-度量空间中的 R-KKM 定理、不动点定理以及抽象经济和定性对策平衡存在定理, 研究了 FC-度量空间中的变分不等式的解集、相交点集、Ky Fan 截口和极大元集的性质. 2011 年, 文献[7-8]在 FC-度量空间建立了新的 R-KKM 定理、匹配定理、重合定理和不动点定理, 研究了 FC-度量空间中的 Ky Fan 截口问题、Ky Fan 相交问题及重合问题. 2012 年, 文献[9-10]研究了 FC-度量空间中的 Ky Fan 匹配定理、变分不等式和鞍点问题等. 本文的目的是研究乘积 FC-度量空间中的极大元集的性质, 作为应用, 进一步研究广义混合向量拟平衡问题系统的解集性质. 在非紧设

---

① 收稿日期: 2013-01-21
基金项目: 贵州省自然科学基金资助项目([2011]2093); 贵州省教育厅自然科学研究重点资助项目((2012)058).
作者简介: 文开庭(1962-), 男, 贵州大方人, 教授, 硕士生导师, 主要从事非线性分析方面的研究.

置下，得到了广义混合向量拟平衡问题系统的解集非空且紧．我们的结论统一、改进和推广了一些近期文献的已知结果．

本文沿用文献[1－10]的相关记号、概念和术语．

定理1 设I为有限指标集，$\forall i\in I$，(X_i,d_i,φ_{N_i})为完备FC-度量空间，$A_i:X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{X_i}$满足：

1) $\forall i\in I$，$\inf_{x_i\in X_i}\mu(X\backslash A_i^{-1}(x_i))=0$；

2) $\forall i\in I$，$\forall x\in X$，$A_i(x)$是空集或X_i的FC-子空间；

3) $\forall x\in X$，若$I(x)=\{i\in I:A_i(x)\neq\phi\}\neq\phi$，则存在$i_0\in I(x)$使得$\pi_{i_0}(x)\notin A_{i_0}(x)$；

4) $\forall i\in I$，A_i^{-1}是转移紧开值的．

则族$\{A_i\}_{i\in I}$的极大元集$M(A_I)=\{x\in X:A_i(x)=\phi,\ \forall i\in I\}$是非空紧集．

证 对X赋予乘积拓扑，设d为X上的乘积度量，$\forall N\in\langle X\rangle$，令$\varphi_N=\prod_{i\in I}\varphi_{\pi_i(N)}$．因$\forall i\in I$，$(X_i,d_i,\varphi_{N_i})$是完备FC-度量空间，且$I$有限，故$(X,d,\varphi_N)$为完备FC-度量空间．定义$A:X\to 2^X$为：

$$A(x)=\begin{cases}\bigcap_{i\in I(x)}\pi_i^{-1}A_i(x) & \text{if } I(x)\neq\phi\\ \phi & \text{if } I(x)=\phi\end{cases}$$

则$\forall x\in X$，$A(x)=\phi$当且仅当$I(x)=\phi$，且$\forall y\in X$，$A^{-1}(y)=\bigcap_{i\in J(y)}A_i^{-1}\pi_i(y)$，其中，$J(y)\subset I$．于是，$\forall y\in X$，$X\backslash A^{-1}(y)=\bigcup_{i\in J(y)}(X\backslash A_i^{-1}\pi_i(y))$．故据1)，$\inf_{y\in X}\mu(X\backslash A^{-1}(y))=0$．据2)，$A(x)$是空集或$X_i$的FC-子空间．据3)，$\forall x\in X$，$x\notin A(x)$．据4)并注意到$I$有限，$A^{-1}$是转移紧开值的．据文献[6]的定理3.6，$M(A)=\{x\in X:A(x)=\phi\}$是非空紧集．

易见，$M(A_I)=M(A)$．事实上，$\forall\hat{x}\in M(A)$，$A(\hat{x})=\phi$，于是，$I(\hat{x})=\phi$，进而，$A_i(\hat{x})=\phi$，$\forall i\in I$，因而，$\hat{x}\in M(A_I)$．反之，$\forall\tilde{x}\in M(A_I)$，$A_i(\tilde{x})=\phi$，$\forall i\in I$，因而，$I(\tilde{x})=\phi$，于是，$A(\tilde{x})=\phi$，故$\tilde{x}\in M(A)$．所以，$M(A_I)=M(A)$是非空紧集．

注1 定理1从映射截口的凸性、下截口的开性、空间的凸性和紧性要求等多方面削弱了条件要求的同时，并加强了结论，将文献[11]的定理3.4加强、改进、推广到乘积FC-度量空间，并统一推广了文献[6]的定理3.6、文献[8]的定理1、文献[12]的定理2.5、文献[13]的定理2.1、文献[14]的定理2.3、文献[15]的定理2.3、文献[16]的定理3.2、文献[17]的定理2.2、文献[18]的定理3.1、文献[19]的定理3.4、文献[20]的定理3.3、文献[21]的定理3等．

定理2 设I为有限指标集，$\{D_i\}_{i\in I}$，$\{E_i\}_{i\in I}$为Housdorff拓扑空间族，$\{(X_i,d_i,\varphi_{N_i})\}_{i\in I}$为完备FC-度量空间族，$\{Z_i\}_{i\in I}$为拓扑向量空间族．$\forall i\in I$，$A_i:X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{X_i}\backslash\{\phi\}$，$C_i:X\to 2^{Z_i}$，$F_i:X\times X_i\to 2^{Z_i}$，$G_i:D_i\times E_i\times X_i\to 2^{Z_i}$，$S_i:X\to 2^{E_i}\backslash\{\phi\}$，$T_i:X\to 2^{D_i}\backslash\{\phi\}$满足：

1) $\forall i\in I$，$B_i=\{x\in X:x_i=\pi_i(x)\in A_i(x)\}$是紧闭集；

2) $\forall i\in I$，A_i^{-1}是转移紧开值的；

3) $\forall i\in I$，T_i和S_i上半连续且具有紧值；

4) $\forall i\in I$，$W_i:X\to 2^{Z_i}$定义为$W_i(x)=Z_i\backslash C_i(x)$，$\forall x\in X$有闭图；

5) $\forall i\in I$，$\forall y_i\in X$，$(x,d_i,e_i)\longmapsto F_i(x,y_i)+G_i(d_i,e_i,y_i)$上半连续且具有紧值；

6) $\forall i\in I$，$\forall x\in X$，$A_i(x)$是X_i的FC-子空间；

7) $\forall i\in I$，$\forall x\in X$，$\{y_i\in X_i:F_i(x,y_i)+G_i(d_i,e_i,y_i)\subset C_i(x),\ \forall d_i\in T_i(x),\ \forall e_i\in S_i(x)\}$

是 X_i 的 FC-子空间；

8) $\forall i \in I$，$\mu(B_i)=\inf_{x_i \in X_i}\mu(X \backslash A_i^{-1}(x_i))=\mu(\{x \in X：\exists d_i \in T_i(x)，e_i \in S_i(x)$ 使得 $F_i(x, y_i)+G_i(d_i, e_i, y_i) \not\subset C_i(x)\})=0$；

9) $\forall x \in X$，若 $I(x)=\{i \in I：A_i(x) \neq \phi\} \neq \phi$，则存在 $i_0 \in I(x)$ 使得 $\pi_{i_0}(x) \notin A_{i_0}(x)$.

则 SGMVQEP 的解集 $S=\{x \in X：\forall i \in I，\exists \hat{d}_i \in T_i(x)，\hat{e}_i \in S_i(x)$ 满足 $x_i=\pi_i(x) \in A_i(x)，F_i(x, y_i)+G_i(\hat{d}_i, \hat{e}_i, y_i) \not\subset C_i(x)，\forall y_i \in A_i(x)\}$ 为非空紧集.

证　$\forall i \in I$，定义 $Q_i：X \to 2^{X_i}$ 为：

$$Q_i(x)=\{y_i \in X_i：F_i(x, y_i)+G_i(d_i, e_i, y_i) \subset C_i(x)，\forall d_i \in T_i(x)，\forall e_i \in S_i(x)\} \qquad \forall x \in X$$

则 $\forall i \in I$，$\forall y_i \in X_i$，

$$Q_i^{-1}(y_i)=\{x \in X：F_i(x, y_i)+G_i(d_i, e_i, y_i) \subset C_i(x)，\forall d_i \in T_i(x)，\forall e_i \in S_i(x)\}$$

$$X \backslash Q_i^{-1}(y_i)=\{x \in X：\exists d_i \in T_i(x)，e_i \in S_i(x) \text{ 使得 } F_i(x, y_i)+G_i(d_i, e_i, y_i) \not\subset C_i(x)\}$$

我们断言：$\forall i \in I$，Q_i^{-1} 是紧开值的，等价地，$\forall i \in I$，$y_i \in X_i$，$X \backslash Q_i^{-1}(y_i)$ 是紧闭的. 事实上，对任意非空紧集 $K \subset X$，设 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $K \cap (X \backslash Q_i^{-1}(y_i))$ 中的网，且 $x_\lambda \to \bar{x}$，则 $\bar{x} \in K$，且因 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X \backslash Q_i^{-1}(y_i)$，故 $\forall i \in I$，$\lambda \in \Lambda$，存在 $(d_\lambda)_i \in T_i(x_\lambda)$，$(e_\lambda)_i \in S_i(x)$ 使得 $F_i(x_\lambda, y_i)+G_i((d_\lambda)_i, (e_\lambda)_i, y_i) \not\subset C_i(x_\lambda)$，$\forall y_i \in X_i$，因而，$\forall y_i \in X_i$，存在 $(v_\lambda)_i \in F_i(x_\lambda, y_i)+G_i((d_\lambda)_i, (e_\lambda)_i, y_i)$ 使得 $(v_\lambda)_i \notin C_i(x_\lambda)$，于是，$(v_\lambda)_i \in W_i(x_\lambda)$. 据 3) 及 K 是紧的知，$T_i(K)$ 和 $S_i(K)$ 分别是 D_i 和 E_i 中的紧集. 设 $(d_\lambda)_i \to \bar{d}_i$，$(e_\lambda)_i \to \bar{e}_i$. 据 3)，$\bar{d}_i \in T_i(\bar{x})$，$\bar{e}_i \in S_i(\bar{x})$. 据 5) 及 K 是紧的知，$\bigcup_{x \in K}(F_i(x, y_i)+G(T_i(x), S_i(x), y_i))$ 是 Z_i 中的紧集. 设 $(v_\lambda)_i \to \bar{v}_i$. 则 $\bar{v}_i \in F_i(\bar{x}, y_i)+G_i(\bar{d}_i, \bar{e}_i, y_i)$，$\forall i \in I$. 据 4)，$\bar{v}_i \in W_i(\bar{x})$，进而，$\bar{v}_i \notin C_i(\bar{x})$. 因而，$\bar{x} \in X \backslash Q_i^{-1}(y_i)$，从而，$\bar{x} \in K \cap (X \backslash Q_i^{-1}(y_i))$. 因此，$\forall i \in I$，$\forall y_i \in X_i$，$X \backslash Q_i^{-1}(y_i)$ 是紧闭的. 所以，$\forall i \in I$，Q_i^{-1} 是紧开值的. $\forall i \in I$，定义 $H_i：X \to 2^{X_i}$ 为：

$$H_i(x)=\begin{cases} A_i(x) \cap Q_i(x) & \text{if } x \in B_i \\ A_i(x) & \text{if } x \notin B_i \end{cases}$$

则 $\forall i \in I$，$y_i \in X_i$，$H_i^{-1}(y_i)=(A_i^{-1}(y_i) \cap Q_i^{-1}(y_i)) \cup ((X \backslash B_i) \cap A_i^{-1}(y_i))$. 因(1)，(2) 及 $\forall i \in I$，Q_i^{-1} 是紧开值的，故 $\forall i \in I$，H_i^{-1} 是转移紧开值的. 据 6) 和(7)，$\forall i \in I$，$\forall x \in X$，$H_i(x)$ 为空集或 X_i 的 FC-子空间. 由 8)，$\forall i \in I$，$\inf_{x_i \in X_i}\mu(X \backslash H_i^{-1}(x_i))=0$. 据 9)，$\forall x \in X$，若 $I(x) \neq \phi$，则存在 $i_0 \in I$ 使得 $\pi_{i_0}(x) \notin H_{i_0}(x)$. 由定理 1，$M(H_I)=\{x \in X：H_i(x)=\phi，\forall i \in I\}$ 为非空紧集.

我们断言：$S=M(H_I)$. 事实上，$\forall \hat{x} \in M(H_I)$，$H_i(\hat{x})=\phi$，$\forall i \in I$. 但是，因 $\forall i \in I$，A_i 是非空值的，故 $\forall i \in I$，$H_i(\hat{x})=A_i(\hat{x}) \cap Q_i(\hat{x})=\phi$，同时，$\hat{x} \in B_i$，进而，$\forall i \in I$，$\hat{x}_i \in A_i(\hat{x})$ 且 $\hat{x}_i \in X_i \backslash Q_i(\hat{x})$，从而，$\hat{x} \in X \backslash Q_i^{-1}(\hat{x}_i)$，$\forall i \in I$. 故 $\forall i \in I$，存在 $\hat{d}_i \in T_i(\hat{x})$，$\hat{e}_i \in S_i(\hat{x})$ 使得 $F_i(\hat{x}, y_i)+G_i(\hat{d}_i, \hat{e}_i, y_i) \not\subset C_i(x)$，$\forall y_i \in A_i(\hat{x})$. 因此，$\hat{x} \in S$. 另一方面，$\forall \tilde{x} \in S$，据 S 的定义，$\forall i \in I$，存在 $\tilde{d}_i \in T_i(\tilde{x})$，$\tilde{e}_i \in S_i(\tilde{x})$ 满足 $\tilde{x}_i \in A_i(\tilde{x})$，$F_i(\tilde{x}, y_i)+G_i(\tilde{d}_i, \tilde{e}_i, y_i) \not\subset C_i(\tilde{x})\}$，$\forall y_i \in A_i(\tilde{x})$. 由于 $\forall i \in I$，$\tilde{x}_i \in A_i(\tilde{x})$，故 $\forall i \in I$，$\tilde{x} \in B_i$. 据 H_i 定义，$\forall i \in I$，$H_i(\tilde{x})=A_i(\tilde{x}) \cap Q_i(\tilde{x})$. 又由于 $\forall i \in I$，存在 $\tilde{d}_i \in T_i(\tilde{x})$，$\tilde{e}_i \in S_i(\tilde{x})$ 满足 $F_i(\tilde{x}, y_i)+G_i(\tilde{d}_i, \tilde{e}_i, y_i) \not\subset C_i(\tilde{x})\}$，$\forall y_i \in A_i(\tilde{x})$，即 $\forall y_i \in A_i(\tilde{x})$，$y_i \notin Q_i(\tilde{x})$. 故 $\forall i \in I$，$H_i(\tilde{x})=A_i(\tilde{x}) \cap Q_i(\tilde{x})=\phi$，即 $\tilde{x} \in M(H_I)$. 所以，SGMVQEP 的解集 $S=M(H_I)$ 为非空紧集.

注2 在文献[1]及有关文献中，对广义混合向量拟平衡问题系统、广义向量拟平衡问题系统、广义混合向量拟变分不等式问题、拟平衡问题、广义向量平衡问题等的研究是研究其解的存在性，定理2在非紧设置下，获得了广义混合向量拟平衡问题系统的解集为非空紧集，加强了有关文献的结论. 此外，定理2的证明弥补了文献[1]定理3.1证明中的一些不足，如，文献[1]定理3.1证明中，将本文定理2证明中的 H_i 设为 S_i，这与定理前提条件中的 S_i 相互混淆.

参考文献:

[1] 方　敏，黄南京. 乘积FC-空间中广义混合向量拟平衡问题系统[J]. 数学学报，2007，50(2)：160－172.

[2] DING Xie-ping. Maximal Element Theorems in Product FC-Spaces and Generalized Games [J]. J Math Anal Appl，2005，305(1)：29－42.

[3] DING Xie-ping，FENG Hai-rong. Fixed Point Theorems and Existence of Equilibrium Points of Noncompact Abstract Economies for L_F^*-Majorized Mappings in FC-Spaces [J]. Nonlinear Anal，2010，72(1)：65－76.

[4] WEN Kai-ting. New GRKKM Theorems in FC-Spaces with Application to Fixed Points [J]. 数学进展，2010，39(3)：331－337.

[5] 文开庭. FC-度量空间中的R-KKM定理及其对抽象经济的应用[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：45－49.

[6] 文开庭. FC-度量空间中的R-KKM定理及其对变分不等式和不动点的应用[J]. 应用泛函分析学报，2010，12(3)：266－273.

[7] 文开庭. 有限度量紧开值映射的R-KKM定理及其对不动点的应用[J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(10)：110－113.

[8] 文开庭，李和睿，段　誉. 非紧FC-度量空间中的极大元定理及其在重合问题的应用[J]. 毕节学院学报，2011，39(8)：38－45.

[9] 文开庭. F_{μ_0}映射的Ky Fan匹配定理及其对抽象经济的应用[J]. 毕节学院学报，2012，30(4)：11－17.

[10] 文开庭. 非紧FC-度量空间中的极大元定理及其对变分不等式和鞍点的应用[J]. 毕节学院学报，2012，30(8)：29－36.

[11] KIRK W A，SIMS B，YUAN Xian-zhi. The Knaster-Kuratowski and Mazurkiewicz Theory in Hyperconvex Metric Spaces and Some of Its Applications [J]. Nonlinear Anal，2000，39：611－627.

[12] WEN Kai-ting. A GLKKM Type Theorem for Noncompact Complete L-Convex Metric Spaces with Applications to Variational Inequalities and Fixed Points [J]. 数学研究与评论，2009，29(1)：19－27.

[13] WEN Kai-ting. A New Maximal Element Theorem in Noncompact Hyperconvex Metric Spaces and Its Application to Abstract Economies [J]. 大学数学，2008，24(5)：19－24.

[14] 文开庭. FC-度量空间中的匹配定理及其对抽象经济的应用[J]. 经济数学，2012，29(4)：38－41.

[15] WEN Kai-ting. A New Fixed Point Theorem in Noncompact Hyperconvex Metric Spaces and Its Application to Saddle Point Problems [J]. 数学研究与评论，2008，28(1)：161－168.

[16] WEN Kai-ting. A New Fixed Point Theorem in Noncompact L-Convex Metric Spaces with Applications to Minimax Inequality and Saddle Points [J]. 数学研究与评论，2011，31(2)：330－336.

[17] WEN Kai-ting. A GLSKKM Theorem in Noncompact Complete L-Convex Metric Spaces with Applications to Abstract Economies [J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2010，33(2)：166－170.

[18] WEN Kai-ting. The Maximal Element Theorem in Noncompact Hyperconvex Metric Spaces and Its Application to the Minimax Question and the Saddle Point Question [J]. 应用泛函分析学报，2009，11(1)：9－14.

[19] WEN Kai-ting. A New Ky Fan Matching Theorem for Transfer Open Covers with Some Applications in L-Convex Metric Spaces [J]. 应用泛函分析学报，2008，10(4)：305－312.

[20] WEN Kai-ting. A Ky Fan Matching Theorem in Complete L-Convex Metric Spaces and Its Application to Abstract Economies [J]. 应用数学，2007，20(3)：593－597.

[21] WEN Kai-ting. A GLsKKM Theorem in Noncompact L-Convex Metric Spaces with Application to Fixed Points [J]. 应用数学，2009，22(1)：72－75.

Properties of Maximal Element Sets in Product FC-Metric Spaces and Their Application to Systems of Generalized Mixed Vector Quasiequilibrium Problems

WEN Kai-ting

School of Civil Engineering and Architecture，Bijie University，Bijie Guizhou 551700，China

Abstract：In this paper，the properties of maximal element sets in product FC-metric spaces are studied. As an application，the properties of solution sets for the systems of generalized mixed vector quasiequilibrium problems are obtained. The results unify，improve and generalize some known results in recent literature.

Key words：FC-metric space；maximal element；system of generalized mixed vector quasiequilibrium problems；solution；transfer compactly open (closed)

责任编辑　汤振金