第 36 卷第 4 期 西南大学学报(自然科学版) 2014 年 4 月
Vol. 36 No. 4 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Apr. 2014

文章编号:1673-9868(2014)4-0066-04

欧氏空间中具有常数量曲率的超曲面的刚性[①]

夏云伟[1], 曾春娜[2]

1. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715;2. 重庆师范大学 数学学院,重庆 401331

摘要: 设 $\boldsymbol{x}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ 为紧致黎曼流形 M^n 到欧氏空间的等距浸入. 对于欧氏空间中具有常数量曲率的子流形,得到一个积分公式,利用这个积分公式证明了:欧氏空间中具常数量曲率的紧致超曲面必然是 n 维欧氏超球面的一个刚性.

关 键 词: 常数量曲率;积分公式;超曲面;刚性

中图分类号: O186.12 **文献标志码:** A

文献[1-2]证明了:

定理 A 设 $\boldsymbol{x}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是紧致连通的定向超曲面,若 M 具有常平均曲率,且支持函数 p 有定号,则 M 必然是 n 维欧氏超球面.

在定理 A 的证明过程中,用到了有关超曲面的平均曲率的一个积分公式,其中位置向量和支持函数起着重要作用. 文献[3]用到了欧氏空间中紧致超曲面的有关 j-阶平均曲率的一个积分公式,它是 Süss 积分公式的一种推广. 利用这个积分公式,文献[3]给出了欧氏空间中超曲面为标准球面的一个充分条件. 对 $n \geqslant 2$,若加上截面曲率 $K > 0$,文献[4]证明了:$\mathbb{R}^{n+1}$ 中常纯量曲率的紧致超曲面与标准球面合同.

本文中,对于欧氏空间中具常纯量曲率的子流形,我们得到一个积分公式,它是定理 A 证明过程中积分公式的一种推广,利用该积分公式,我们得到以下刚性定理:

定理 1 设 $\boldsymbol{x}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是紧致连通的定向超曲面,则 M 具有常数量曲率,且支持函数 p 有定号(或 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 是星形的)当且仅当 M 必然是 n 维欧氏超球面.

1 预备知识及引理

设 $\boldsymbol{x}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ 为紧致黎曼流形 M^n 到欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的等距浸入,对任意 $p \in M^n$,$\boldsymbol{x}(p)$ 为位置向量,设 $\{\boldsymbol{e}_i\}$,$\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ 分别为局部切向量场和法向量场,则有分解式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top + \boldsymbol{x}^\perp \qquad \boldsymbol{x}^\top = u_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{x}^\perp = p^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$$

约定 $1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n$,$n+1 \leqslant \alpha, \beta, \cdots \leqslant n+m$,单项式中指标相同表示求和,我们省略求和符号 $\sum$,其中

$$u_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle \qquad p^\alpha = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_\alpha \rangle \tag{1}$$

浸入 $\boldsymbol{x}$ 的结构方程为

① 收稿日期:2012-09-25
基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助(XDJK2013C134,SWU113061);国家自然科学基金天元基金资助项目(11326073);重庆市教委基金资助项目(KJ130614).
作者简介:夏云伟(1974-),男,湖北随州人,讲师,主要从事微分几何学的研究.
通信作者:曾春娜,副教授.

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\omega_i\boldsymbol{e}_i \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j+\omega_{i\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\alpha=\omega_{\alpha i}\boldsymbol{e}_i+\omega_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\beta \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0 \qquad \omega_{\alpha i}+\omega_{i\alpha}=0 \qquad \omega_{\alpha\beta}+\omega_{\beta\alpha}=0 \qquad \omega_{i\alpha}=h^\alpha_{ij}\omega_j \qquad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}$$

u_i 的共变微分 $u_{i,j}$ 定义为

$$u_{i,j}\omega_j=\mathrm{d}u_i+u_j\omega_{ji}$$

对(1)式中的 $u_i=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle$ 微分，并利用结构方程(2)，有

$$u_{i,j}\omega_j=(\delta_{ij}\omega_j+\omega_{ij}u_j+\omega_{i\alpha}p^\alpha)+u_j\omega_{ji}=\delta_{ij}\omega_j+h^\alpha_{ij}p^\alpha\omega_j$$

从而有

$$u_{i,j}=\delta_{ij}+p^\alpha h^\alpha_{ij} \tag{3}$$

切向量场的散度

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{x}^\top)=\sum_i u_{i,i}=n(1+H^\alpha p^\alpha)$$

于是有积分公式

$$\int_M(1+H^\alpha p^\alpha)\mathrm{d}M=0 \tag{4}$$

定义法向量 $\boldsymbol{x}^\perp=p^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ 的分量 p^α 的共变导数 $p^\alpha_{,i}$，$p^\alpha_{,ij}$ 为

$$p^\alpha_{,i}\omega_i=\mathrm{d}p^\alpha+p^\beta\omega_{\beta\alpha} \qquad p^\alpha_{,ij}\omega_j=\mathrm{d}p^\alpha_{,i}+p^\alpha_{,j}\omega_{ji}+p^\beta_{,i}\omega_{\beta\alpha}$$

那么，由(1),(2)式，有

$$p^\alpha_{,i}=-u_jh^\alpha_{ij}$$

利用(3)式，有

$$p^\alpha_{,ij}=-(u_kh^\alpha_{ki,j}+h^\alpha_{ij}+p^\beta h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj})$$

对法向量场 $\xi=\xi^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$，文献[5]定义了方括号算子 $\square$：

$$\square\xi=\sum_{\alpha,i,j}(nH^\alpha\delta_{ij}-h^\alpha_{ij})\xi^\alpha_{,ij}$$

并且有

$$\int_M\square\xi\mathrm{d}M=0 \tag{5}$$

注意到

$$\begin{aligned}\square\boldsymbol{x}^\perp=&-\sum_{\alpha,i,j}(nH^\alpha\delta_{ij}-h^\alpha_{ij})(u_kh^\alpha_{ki,j}+h^\alpha_{ij}+p^\beta h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj})= \\ &-u_k(nH^\alpha\delta_{ij}-h^\alpha_{ij})h^\alpha_{ki,j}-(n^2(H^\alpha)^2-(h^\alpha_{ij})^2+p^\beta(nH^\alpha h^\alpha_{ik}h^\beta_{ki}-h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj}))= \\ &-u_k(n^2H^\alpha H^\alpha_{,k}-h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ij,k})-(n^2|\vec{\boldsymbol{H}}|^2-S)-p^\beta(\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{A}_\beta)-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2_\alpha\boldsymbol{A}_\beta))\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $S=\sum_{i,j}(h^\alpha_{ij})^2$，$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

对 Gauss 方程

$$n^2|\vec{\boldsymbol{H}}|^2-S=r \tag{7}$$

求导，其中 r 为数量曲率，则对每个 k 有

$$n^2H^\alpha H^\alpha_{,k}-h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ij,k}=\frac{1}{2}r_{,k} \tag{8}$$

由(5)-(8)式得：

引理1 设 $\boldsymbol{x}:M^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+m}$ 为具有常数量曲率的紧致黎曼流形 M 到欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的定向浸入，则有积分公式

$$\int_Mp^\beta(\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{A}_\beta)-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2_\alpha\boldsymbol{A}_\beta))\mathrm{d}M=-rV_M \tag{9}$$

由(4) 式，有

$$\int_M p^\beta r\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\beta\right)\mathrm{d}M=-rV_M \tag{10}$$

由(9) 和(10) 式得出

$$\int_M p^\beta\left(\frac{1}{n}r\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\beta-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{A}_\beta)+\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha^2\boldsymbol{A}_\beta)\right)\mathrm{d}M=0$$

即

$$\int_M p^\beta((\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha)^2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\beta-\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha^2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\beta-n\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_\alpha\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{A}_\beta)+n\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_\alpha^2\boldsymbol{A}_\beta))\mathrm{d}M=0 \tag{11}$$

引理 2[6−7]　设 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 是实数，使得 $\sum_i\alpha_i=0$，$\sum_i\alpha_i^2$ 为不小于 0 的常数，则

$$\left|\sum_i\alpha_i^3\right|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum_i\alpha_i^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

等号成立当且仅当存在 $n-1$ 个 α_i 相等，或所有的 α_i 等于 0.

2　定理 1 的证明

对于超曲面，取 $\alpha,\beta=n+1$，我们省去这些指标，(11) 式成为

$$\int_M p((\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^3-(n+1)\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}+n\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3)\mathrm{d}M=0 \tag{13}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-H\boldsymbol{I}$，其中 $H=\frac{1}{n}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，则有

$$\begin{array}{cc}\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=0 & \operatorname{tr}\boldsymbol{A}=nH\\ \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2+2H\boldsymbol{B}+H^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{B}^3+3H^2\boldsymbol{B}+3H\boldsymbol{B}^2+H^3\boldsymbol{I}\\ \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+nH^2 & \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3+3H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+nH^3\end{array}$$

我们有

$$\begin{aligned}&(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^3-(n+1)\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}+n\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3=\\&n^3H^3-n(n+1)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2-n^2(n+1)H^3+n\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3+3nH\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+n^2H^3=\\&-n(n+1)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+n\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3+3nH\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2=\\&-n(n-2)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+n\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3\end{aligned}$$

由(12) 式得到

$$|\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3|\leqslant\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2)^{\frac{3}{2}}$$

于是有

$$\begin{aligned}-n(n-2)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2)^{\frac{3}{2}}\leqslant&-n(n-2)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+n\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3\leqslant\\&-n(n-2)H\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2+\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}-n(n-2)\left(H+\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2\leqslant&(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^3-(n+1)\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}+n\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3\leqslant\\&-n(n-2)\left(H-\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2\end{aligned} \tag{14}$$

假定 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 是星形的，即存在一点 $o\in\mathbb{R}^{n+1}$，使得对每点 $p\in M^n$，开线段 $\overline{o\boldsymbol{x}(p)}$ 含在以 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 为边界的区域内部(等价说法是：存在点 $o\in\mathbb{R}^{n+1}$，它位于 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 所有切空间的同一侧). 于是 p 保持定号，不妨设 $p<0$. 由 Guass 方程及 Schwarz 不等式，有

$$n(n-1)H^2\geqslant r \tag{15}$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 是全脐的. 由于是 $\boldsymbol{x}(M^n)$ 紧致的，至少有一点是椭圆点，于是常数 $r>0$.（15）式指出 H 处处非零. 设 $H>0$，由

$$\left(H+\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\left(H-\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)=\frac{r}{n(n-1)}>0$$

有

$$H-\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}>0$$

由(13)及(14)式得到

$$0\leqslant\int_M -p\left(H-\frac{\sqrt{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2\,\mathrm{d}M\leqslant 0$$

由此得出 $\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2=0$，即 $S-nH^2=0$，M^n 为全脐的. 由于 M^n 是紧致的，从而 M^n 必然是 n 维欧氏超球面，于是定理1得证.

参考文献：

[1] LIEBMANN H. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Gottingen [J]. Math Phys Ki, 1939(2): 44－55.

[2] SÜSS W. Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären Durch Herrn K P Grotemeyer [J]. Arch Math, 1952(3): 311－313.

[3] HSIUNG C C. Some Integral Formulas for Closed Hypersurfaces [J]. Math Scand, 1954(2): 286－294.

[4] CHENG Shao-yuan, YAU S T. Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature [J]. Math Ann, 1977, 225(3): 195－204.

[5] GUO Zhen. Willore Submanifolds in the Unit Sphere [J]. Collrct Math, 2004, 55(3): 279－287.

[6] OKUMURA M. Hypersurfaces and a Pinching Problem on the Second Fundamental Tensor [J]. Amer J Math, 1974, 96(1): 207－213.

[7] ALENCAR H, DO CARMO M. Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120(4): 1223－1229.

Rigidity of Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in Euclidean Space

XIA Yun-wei[1], ZENG Chun-na[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: Let $\boldsymbol{x}: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ be a compact orientable Riemannian manifold isometrically immersed in the Euclidean space. For a compact orientable Riemannian manifold with constant scalar curvature in the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+m}$, an integral formula is obtained. By using the formula, one gets a rigidity theorem that a hypersurface with constant scalar curvature in the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ must be an n-dimensional hypersphere.

Key words: constant scalar curvature; integral formula; hypersurface; rigidity

责任编辑 廖 坤