第 36 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014 年 4 月
Vol. 36　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2014

文章编号：1673-9868(2014)4-0059-07

CAT(0)空间中迭代序列的 Δ-收敛性和强收敛性[①]

王显韬，　邓　磊，　肖　鹃

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在CAT(0)空间中引入渐近非扩张映射族的迭代序列，研究了该迭代序列的Δ-收敛性和强收敛性，分别证明了迭代序列Δ-收敛和强收敛到这族渐近非扩张映射的公共不动点.

关　键　词：渐近非扩张映射；公共不动点；Δ-收敛；强收敛；CAT(0)空间

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A

设(X, d)为度量空间. 若对于任意的$t, t' \in [0, l]$，映射$c: [0, l] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$满足$c(0) = x$，$c(l) = y$和$d(c(t), c'(t)) = |t - t'|$，则称映射$c$为连接$x \in X$与$y \in X$的测地路径，$c$的像集称为测地段. 特别地，当测地路径唯一时，则记测地段为$[x, y]$. 如果X中任意两点是测地连接的，则称(X, d)为测地度量空间. 如果子集$Y \subset X$包含连接任意两点的所有测地段，则称Y为凸子集. 测地度量空间(X, d)中的测地三角形$\Delta(x_1, x_2, x_3)$包含点x_1, x_2, x_3和连接每对顶点间的测地段. 测地三角形$\Delta(x_1, x_2, x_3)$的比较三角形是欧式空间$\mathbb{E}^2$中的三角形$\Delta(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$且满足$d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}_i, \overline{x}_j) = d(x_i, x_j)$，$i, j \in \{1, 2, 3\}$.

设Δ为X中的测地三角形，$\overline{\Delta}$为Δ的比较三角形. 如果对任意的$x, y \in \Delta$和任意的比较点$\overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Delta}$，都有$d(x, y) \leqslant d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, \overline{y})$，则称$\Delta$满足CAT(0)不等式.

如果$x, y_1, y_2 \in X$且y_0为$[y_1, y_2]$的中点，则CAT(0)不等式蕴含着

$$d(x, y_0)^2 \leqslant \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2 \tag{1}$$

当X满足不等式(1)时，称它为CAT(0)空间[1].

引理 1[2]　设(X, d)为CAT(0)空间，$x, y \in X$，则

(i) (X, d)是测地唯一的；

(ii) 若$p \in [x, y]$，$\alpha \in [0, 1]$，$m_1 \in [p, x]$，$m_2 \in [p, y]$，且$d(p, m_1) = \alpha d(p, x)$，$d(p, m_2) = \alpha d(p, y)$，则$d(m_1, m_2) \leqslant \alpha d(x, y)$；

(iii) 若$z, w \in [x, y]$使得$d(x, z) = d(x, w)$，则$z = w$；

(iv) 对任意的$t \in [0, 1]$，存在唯一的$z \in [x, y]$，使得$d(x, z) = td(x, y)$和$d(y, z) = (1-t)d(x, y)$. 记$z = (1-t)d(x, y) \oplus td(x, y)$.

设$\{x_n\}$为X中的有界序列，对任意的$x \in X$，令$r(x, \{x_n\}) = \limsup\limits_{n \to \infty} d(x, x_n)$. 序列$\{x_n\}$的渐近半

---

① 收稿日期：2012-11-28
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11226228).
作者简介：王显韬(1991-)，男，重庆江北人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：邓　磊，教授.

径为 $r(\{x_n\})=\inf\{r(x,\{x_n\}):x\in X\}$，序列$\{x_n\}$的渐近中心为

$$A(\{x_n\})=\{x\in X:r(x,\{x_n\})=r(\{x_n\})\}$$

设序列$\{u_n\}\subset X$为$\{x_n\}$的任意子列，如果 x 为任意子列$\{u_n\}$的唯一渐近中心，则称序列$\{x_n\}\Delta$-收敛到 $x\in X$，记为 $\Delta\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，称 x 为$\{x_n\}$的 Δ-极限[3-4]，记为 $w_\Delta(x_n)=\bigcup\{A(\{u_n\})\}$.

引理 2[5] 设$\{\lambda_n\}$,$\{\delta_n\}$为非负实序列，对任意的 $n\geqslant 1$，有 $\lambda_{n+1}\leqslant\lambda_n+\delta_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ 存在. 如果存在子列$\{\lambda_{n_j}\}\subset\{\lambda_n\}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{n_j}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

引理 3[6] 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{\delta_n\}$为非负实序列，对任意的 $n\geqslant 1$，有 $a_{n+1}\leqslant(1+\delta_n)a_n+b_n$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$，则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(ii) 若$\{a_n\}$存在子列$\{a_{n_k}\}$收敛于 0，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

引理 4[4] 设 X 为 CAT(0) 空间，则对任意的 $x,y,z\in X$，$t\in[0,1]$，有

$$d((1-t)x\oplus ty,z)\leqslant(1-t)d(x,z)+td(y,z)$$

引理 5[7] 设 X 为 CAT(0) 空间，则对任意的 $x,y,z\in X$，$t\in[0,1]$，有

$$d((1-t)x\oplus ty,z)^2\leqslant(1-t)d(x,z)^2+td(y,z)^2-t(1-t)d(x,y)^2$$

引理 6[4] 设 X 为 CAT(0) 空间，则

(i) X 中任意有界序列有 Δ-收敛子列；

(ii) 若 K 为 X 中有界闭凸子集，$\{x_n\}$为 K 中有界序列，则序列$\{x_n\}$的渐近中心 x 属于 K；

(iii) 若 K 为 X 中有界闭凸子集，$f:K\longrightarrow X$ 为非扩张映射，$d(x_n,f(x_n))\to 0$，则 $f(x)=x$.

文献[7]研究了 CAT(0) 空间中以下两个迭代序列：

$$\begin{cases}x_1=x\in K\\ x_{n+1}=(1-a_n)Tx_n\oplus a_nTy_n\\ y_n=(1-b_n)x_n\oplus b_nTx_n & n\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-a_n)x_n\oplus a_nTy_n\\ y_n=(1-b_n)x_n\oplus b_nSx_n & n\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{3}$$

其中$\{a_n\}$,$\{b_n\}\in(0,1)$，并且证明了 CAT(0) 空间中迭代序列(2)和(3)的强收敛性与 Δ-收敛性.

定义 1 设 X 是 CAT(0) 空间，K 是 X 的非空子集. 如果存在连续映射 $P:X\longrightarrow K$，使得当 $z\in K$ 时有 $P(z)=z$，则称 K 是 X 的一个收缩核，称 P 为一个保核收缩.

定义 2 设 X 是 CAT(0) 空间，K 是 X 的非空子集，$P:X\longrightarrow K$ 是保核收缩.

(i) 如果存在序列$\{k_n\}\subset[1,\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，使得对任意的 $x,y\in K$，$n\geqslant 1$，有 $d(T(PT)^{n-1}x,T(PT)^{n-1}y)\leqslant k_nd(x,y)$，则称非自映射 $T:X\longrightarrow K$ 为渐近非扩张映射.

(ii) 如果存在实数 $L>0$，使得对任意的 $x,y\in K$ 和 $n\geqslant 1$，有 $d(T(PT)^{n-1}x,T(PT)^{n-1}y)\leqslant Ld(x,y)$，则称非自映射 T 为非一致 L-Lipschitzian 映射.

设 X 为 CAT(0) 空间，K 为 X 的非空闭凸子集，$T_1,T_2,\cdots,T_r:K\longrightarrow X$ 均为渐近非扩张映射，$\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,1-\varepsilon]$，$\varepsilon\in(0,1)$，$r\geqslant 2$. 序列$\{x_n\}$定义如下：

$$\begin{cases} x_{n+1}=P((1-\alpha_{1n})y_{n+r-2}\oplus\alpha_{1n}T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}) \\ y_{n+r-2}=P((1-\alpha_{2n})y_{n+r-3}\oplus\alpha_{2n}T_2(PT_2)^{n-1}y_{n+r-3}) \\ y_{n+r-3}=P((1-\alpha_{3n})y_{n+r-4}\oplus\alpha_{3n}T_3(PT_3)^{n-1}y_{n+r-4}) \\ \vdots \\ y_{n+1}=P((1-\alpha_{(r-1)n})y_n\oplus\alpha_{(r-1)n}T_{r-1}(PT_{r-1})^{n-1}y_n) \\ y_n=P((1-\alpha_{rn})x_n\oplus\alpha_{rn}T_r(PT_r)^{n-1}x_n) \end{cases}\quad n\geqslant 1 \tag{4}$$

本文研究了迭代序列 4 的 Δ-收敛性和强收敛性，并证明迭代序列$\{x_n\}$分别 Δ-收敛和强收敛到这族渐近非自映射族的公共不动点，推广了文献 [7－8] 中的相应结果.

引理 7　设 X 为 CAT(0) 空间，K 为 X 的非空子集且为保核收缩 P 的收缩核. 设 $T_1,T_2,\cdots,T_r: K\longrightarrow X$ 均为渐近非扩张映射，序列$\{k_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}k_{jn}=1$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{jn}-1)<\infty$ $(j=1,2,\cdots,r)$. 设$\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,1-\varepsilon]$，$\varepsilon\in(0,1)$，$j\in\{1,2,\cdots,r\}$. 序列$\{x_n\}$定义如(4) 式，$x^*\in\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)$，则$\{x_n\}$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x^*)$存在.

证　对所有 $j\in\{1,2,\cdots,r\}$，令 $u_{jn}=k_{jn}-1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{jn}<\infty$. 对任意的 $x^*\in\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)$，有

$$\begin{aligned} d(y_n,x^*)=&d(P((1-\alpha_{rn})x_n\oplus\alpha_{rn}T_r(PT_r)^{n-1}x_n),P(x^*))\leqslant \\ &(1-\alpha_{rn})d(x_n,x^*)+\alpha_{rn}d(T_r(PT_r)^{n-1}x_n,x^*)\leqslant \\ &(1+u_{rn})d(x_n,x^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y_{n+r-2},x^*)=&d(P((1-\alpha_{2n})y_{n+r-3}\oplus\alpha_{2n}T_2(PT_2)^{n-1}y_{n+r-3}),P(x^*))\leqslant \\ &(1-\alpha_{2n})d(y_{n+r-3},x^*)+\alpha_{2n}d(T_r(PT_r)^{n-1}y_{n+r-3},x^*)\leqslant \\ &(1+u_{2n})d(y_{n+r-3},x^*) \end{aligned}$$

设

$$s_n=\max_{j=1,2,\cdots,r}\{u_{jn}\}\qquad n\in\mathbb{N}_+$$

$$a_r=\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\cdots+\binom{r}{r}$$

于是有

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x^*)\leqslant&(1+u_{1n})d(y_{n+r-2},x^*)\leqslant \\ &(1+u_{1n})(1+u_{2n})\cdots(1+u_{rn})d(x_n,x^*)\leqslant \\ &d(x_n,x^*)\left[1+\binom{r}{1}s_n+\binom{r}{2}s_n^2+\cdots+\binom{r}{r}s_n^r\right]\leqslant d(x_n,x^*)(1+a_rs_n)\leqslant \\ &d(x_n,x^*)\exp(a_rs_n)\leqslant d(x_1,x^*)\exp(a_r\sum_{n=1}^{\infty}s_n)<\infty \end{aligned}$$

因此$\{x_n\}$有界，且存在常数 $M>0$，使得 $d(x_{n+1},x^*)\leqslant d(x_n,x^*)+a_rMs_n$. 由引理 2，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x^*)$存在.

引理 8　设 X 为 CAT(0) 空间，K 为 X 中的闭凸非空子集且为保核收缩 P 的非扩张收缩核. $T_1,T_2,\cdots,T_r: K\longrightarrow X$ 为渐近非扩张映射，序列$\{k_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}k_{jn}=1$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{jn}-1)<\infty$ $(j=1,2,\cdots,r)$. 设$\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,1-\varepsilon]$，$\varepsilon\in(0,1)$，$j\in\{1,2,\cdots,r\}$. 序列$\{x_n\}$的定义如(4) 式，$x^*\in\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)$，则

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,T_1x_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,T_2x_n)=\cdots=\lim_{n\to\infty}d(x_n,T_rx_n)=0$$

证　由引理 7，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x^*)$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x^*)=c$，且对任意的 $m=2,3,\cdots,r$，有

$$d(y_{n+r-m}, x^*) \leqslant d(x_n, x^*)(1+u_{mn})(1+u_{(m+1)n})\cdots(1+u_{rn})$$

两边取上极限可得$\limsup\limits_{n\to\infty} d(y_{n+r-m}, x^*) \leqslant c$. 又由引理 7 可知

$$d(x_{n+1}, x^*) \leqslant (1+u_{1n})(1+u_{2n})\cdots(1+u_{(m-1)n})d(y_{n+r-m}, x^*)$$

两边取下极限可得 $c \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} d(y_{n+r-m}, x^*)$. 故$\lim\limits_{n\to\infty} d(y_{n+r-m}, x^*) = c$. 由引理 5 得

$$\begin{aligned} d(y_{n+r-m}, x^*)^2 = & d(P((1-\alpha_{mn})y_{n+r-m-1} \oplus \alpha_{mn}T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1}), P(x^*))^2 \leqslant \\ & (1-\alpha_{mn})d(y_{n+r-m-1}, x^*)^2 + \alpha_{mn}d(T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1}, x^*)^2 - \\ & \alpha_{mn}(1-\alpha_{mn})d(y_{n+r-m-1}, T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1})^2 \leqslant \\ & (1-\alpha_{mn})d(y_{n+r-m-1}, x^*)^2 + \alpha_{mn}(1+u_{mn})d(y_{n+r-m-1}, x^*)^2 - \\ & \alpha_{mn}(1-\alpha_{mn})d(y_{n+r-m-1}, T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1})^2 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & d(y_{n+r-m-1}, T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1})^2 \leqslant \\ & \frac{1}{\alpha_{mn}(1-\alpha_{mn})}[(1+u_{mn})d(y_{n+r-m-1}, x^*)^2 - d(y_{n+r-m}, x^*)^2] \leqslant \\ & \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}[(1+u_{mn})d(y_{n+r-m-1}, x^*)^2 - d(y_{n+r-m}, x^*)^2] \to 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} d(x_n, T_mx_n)^2 \leqslant & d(x_n, y_{n+r-m-1}) + d(y_{n+r-m-1}, T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1}) + \\ & d(T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1}, T_mx_n) \leqslant \\ & d(x_n, y_{n+r-m-1}) + d(y_{n+r-m-1}, T_m(PT_m)^{n-1}y_{n+r-m-1}) + \\ & Ld(T_m(PT_m)^{n-2}y_{n+r-m-1}, x_n) \to 0 \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_2x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, T_3x_n) = \cdots = \lim_{n\to\infty} d(x_n, T_rx_n) = 0$$

又由引理 5,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x^*)^2 = & d(P((1-\alpha_{1n})y_{n+r-2} \oplus \alpha_{1n}T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}), P(x^*))^2 \leqslant \\ & (1-\alpha_{1n})d(y_{n+r-2}, x^*)^2 + \alpha_{1n}d(T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}, x^*)^2 - \\ & \alpha_{1n}(1-\alpha_{1n})d(y_{n+r-2}, T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2})^2 \leqslant \\ & (1-\alpha_{1n})d(y_{n+r-2}, x^*)^2 + \alpha_{1n}(1+u_{1n})d(y_{n+r-2}, x^*)^2 - \\ & \alpha_{1n}(1-\alpha_{1n})d(y_{n+r-2}, T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2})^2 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & d(y_{n+r-2}, T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2})^2 \leqslant \\ & \frac{1}{\alpha_{1n}(1-\alpha_{1n})}[(1+u_{1n})d(y_{n+r-2}, x^*)^2 - d(x_{n+1}, x^*)^2] \leqslant \\ & \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}[(1+u_{1n})d(y_{n+r-2}, x^*)^2 - d(x_{n+1}, x^*)^2] \to 0 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & d(x_{n+1}, y_{n+r-2}) = \\ & d(P((1-\alpha_{1n})y_{n+r-2} \oplus \alpha_{1n}T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}), y_{n+r-2}) \leqslant \\ & (1-\alpha_{1n})d(y_{n+r-2}, y_{n+r-2}) + \alpha_{1n}d(T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}, y_{n+r-2}) \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, T_1x_{n+1}) \leqslant & d(x_{n+1}, T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}) + \\ & d(T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2}, T_1y_{n+r-2}) + d(T_1y_{n+r-2}, T_1x_{n+1}) \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&d(x_{n+1},\ y_{n+r-2})+d(y_{n+r-2},\ T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2})+\\&Ld(T_1(PT_1)^{n-2}y_{n+r-2},\ y_{n+r-2})+Ld(y_{n+r-2},\ x_{n+1})=\\&(L+1)d(x_{n+1},\ y_{n+r-2})+d(y_{n+r-2},\ T_1(PT_1)^{n-1}y_{n+r-2})+\\&Ld(T_1(PT_1)^{n-2}y_{n+r-2},\ y_{n+r-2})\to 0\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,\ T_1x_n)=0$.

定理 1　设 X 为完备的CAT(0)空间，K 为 X 中的闭凸非空子集且为保核收缩 P 的非扩张收缩核. T_1，T_2，…，T_r：$K\longrightarrow X$ 均为渐近非扩张映射，序列$\{k_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}k_{jn}=1$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{jn}-1)<\infty$ $(j=1,2,\cdots,r)$. 设$\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$，$\varepsilon\in(0,\ 1)$，$j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$. 序列$\{x_n\}$ 由(4) 式定义，$x^*\in\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)$，则序列$\{x_n\}\Delta$-收敛到$\{T_j\}_{j=1}^{r}$ 的公共不动点.

证　由引理 8，对所有的$q\in\mathrm{F}(T)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ q)$ 存在，于是$\{x_n\}$ 有界. 由引理 9，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ Tx_n)=0$. 首先证明 $w_\Delta(x_n)\subset\mathrm{F}(T)$. 设 $u\in w\Delta(x_n)$，则$\{x_n\}$ 存在子列$\{x_{n_j}\}$，使得 $A(\{u_n\})=\{u\}$. 由引理 4，$\{x_{n_j}\}$ 存在子列$\{u_n\}$，使得对某个 $v\in K$，有 Δ-$\lim\limits_{n}v_n=v$. 由引理 7，$v\in\mathrm{F}(T)$. 由引理 8，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ v)$ 存在. 接下来证明 $u=v$. 假设 $u\neq v$，则由渐近中心的唯一性，有

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ v)<\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ u)\leqslant\limsup_{n\to\infty}d(u_n,\ u)<\\&\qquad\limsup_{n\to\infty}d(u_n,\ v)=\limsup_{n\to\infty}d(x_n,\ v)=\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ v)\end{aligned}$$

矛盾，所以 $u=v\in\mathrm{F}(T)$ 且 $w_\Delta(x_n)\subset\mathrm{F}(T)$. 为了证明$\{x_n\}\Delta$-收敛到 T 的不动点，需证 $w_\Delta(x_n)$ 包含唯一的点. 设$\{u_n\}$ 为$\{x_n\}$ 的子列. 由引理 7，存在子列$\{v_n\}\subset\{u_n\}$ 使得对某个 $v\in K$，有 Δ-$\lim\limits_{n}v_n=v$. 令 $A(\{u_n\})=\{u\}$ 且 $A(\{x_n\})=\{x\}$. 则有 $u=v$ 且 $v\in\mathrm{F}(T)$. 最后证明 $x=v$. 假设 $x\neq v$，则由$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ v)$ 的存在性和渐近中心的唯一性可知

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ v)<\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ x)\leqslant\limsup_{n\to\infty}d(x_n,\ x)<\\&\qquad\limsup_{n\to\infty}d(u_n,\ v)=\limsup_{n\to\infty}d(x_n,\ v)=\limsup_{n\to\infty}d(v_n,\ v)\end{aligned}$$

矛盾，故 $x=v\in\mathrm{F}(T)$. 于是，$w_\Delta(x_n)=x$.

定理 2　设 X 为完备的CAT(0)空间，K 为 X 中的闭凸非空子集且为保核收缩 P 的非扩张收缩核. T_1，T_2，…，T_r：$K\longrightarrow X$ 均为渐近非扩张映射，序列$\{k_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}k_{jn}=1$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{jn}-1)<\infty$ $(j=1,2,\cdots,r)$. 设$\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$，$\varepsilon\in(0,\ 1)$，$j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$. 序列$\{x_n\}$ 由(4) 式定义. 如果 $\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$. 则序列$\{x_n\}$ 强收敛到$\{T_j\}_{j=1}^{r}$ 的公共不动点当且仅当$\liminf\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F})=0$，其中 $d(x,\ \mathrm{F})=\inf\{d(x,\ p):\ p\in\mathrm{F}\}$.

证　必要性容易得到，下证充分性.

假设$\liminf\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F}(T))=0$. 由引理 8，对所有的 $x^*\in\bigcap\limits_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$，有

$$d(x_{n+1},\ x^*)\leqslant d(x_n,\ x^*)+a_rMs_n$$

于是有

$$d(x_{n+1},\ \mathrm{F}(T))\leqslant d(x_n,\ \mathrm{F}(T))+a_rMs_n$$

由引理 1，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F}(T))$ 存在. 于是由假设可知$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F}(T))=0$.

接下来证明$\{x_n\}$ 为柯西序列. 设任意的 $\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F}(T))=0$，则存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$ 使得 $d(x_n,\ \mathrm{F}(T))<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 特别地，

$$\inf\{d(x_{n_0},\ p):\ p\in \mathrm{F}(T)\}<\frac{\varepsilon}{4}$$

于是存在 $x^*\in\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$ 使得 $d(x_{n_0},\ x^*)<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于任意的 $m,n\geqslant n_0$,有

$$d(x_{n+m},\ x_n)\leqslant d(x_{n+m},\ p^*)+d(p^*,\ x_n)\leqslant 2d(x_{n_0},\ p^*)<2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

因此,$\{x_n\}$ 为完备的CAT(0)空间中闭凸子集 K 中的柯西序列,且收敛于点 $x^*\in K$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\mathrm{F}(T_j))=0$ 可知 $d(x^*,\mathrm{F}(T_j))=0$,且由 $\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$ 的封闭性可知 $x^*\in\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$.

设 K 为 X 非空子集,如果存在非减函数 $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$,使得对任意的 $t>0$,$f(0)=0$,$f(t)>0$,对所有的 $x\in K$ 满足

$$\frac{1}{r}(d(x,\ T_1x)+d(x,\ T_2x)+\cdots+d(x,\ T_rx))\geqslant f(d(x,\ \mathrm{F}(T)))$$

则称映射 $T_j:K\longrightarrow X\ (j=1,2,\cdots,r)$ 满足条件(A′).

定理3 设 X 为CAT(0)空间,K 为 X 中的闭凸非空子集且为保核收缩 P 的非扩张收缩核. $T_1,T_2,\cdots,T_r:K\longrightarrow X$ 均为渐近非扩张映射,满足条件(A′),序列 $\{k_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{jn}-1)<\infty\ (j=1,2,\cdots,r)$. 设 $\{\alpha_{jn}\}\subset[\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$,$\varepsilon\in(0,\ 1)$,$j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$,序列 $\{x_n\}$ 由(4)式定义. 如果 $\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)\neq\varnothing$,则序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\{T_j\}_{j=1}^{r}$ 的公共不动点.

证 由引理8,对所有的 $x^*\in\bigcap_{j=1}^{r}\mathrm{F}(T_j)$,$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ x^*)$ 存在,设极限为 c,则 $c\geqslant 0$. 如果 $c=0$,则结论显然. 假设 $c>0$,则由 $d(x_{n+1},\ x^*)\leqslant d(x_n,\ x^*)+a_rMs_n$ 可知

$$\inf_{x^*\in\mathrm{F}} d(x_{n+1},\ x^*)\leqslant\inf_{x^*\in\mathrm{F}} d(x_n,\ x^*)+a_rMs_n$$

于是 $d(x_{n+1},\ \mathrm{F})\leqslant d(x_n,\ \mathrm{F})+a_rMs_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F})$ 存在. 由条件(A′),

$$\lim_{n\to\infty}f(d(x_n,\ \mathrm{F}))\leqslant\frac{1}{r}(d(x_n,\ T_1x_n)+d(x_n,\ T_2x_n)+\cdots+d(x_n,\ T_rx_n))=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(d(x_n,\ \mathrm{F}))=0$$

又因为 f 为非减函数且 $f(0)=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,\ \mathrm{F})=0$$

接下来的证明过程类似于定理2.

参考文献:

[1] BRIDSON M, HAEFLIGER A. Metric Spaces of Non-Positive Curvature [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[2] DHOMPONGSA S, PANYANAK B. On Δ-Convergence Theorems in CAT(0) Spaces [J]. Comput Math Appl, 2008, 56(10): 3689-3696.

[3] LIM T C. Remarks on Some Fixed Point Theorems [J]. Proc Amer Math Soc, 1976, 60(1): 179-182.

[4] KIRK W A, PANYANAK B. A Concept of Convergence in Geodesic Spaces [J]. Nonlinear Anal, 2008, 68(12): 3689-3696.

[5] TAN K K, XU Hong-kun. Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings by Ishikawa Iteration Process [J]. J Math Anal Appl, 1993, 178(5): 301-308.

[6] SCHU J. Weak and Strong Convergence of Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Bull Austral Math Soc, 1991, 43(2): 153-159.

[7] KHAN S H，ABBSA M. Strong and Δ-Convergence of Some Iterative Shemes in CAT(0) Spaces [J]. Comput Math Appl，2011，61(1)：109－116.

[8] YILDIRIM I，OZDEMIR M. A New Iterative Process for Common Fixed Points of Finite Families of Non-Self-Asymptotically Non-Expansive Mappings [J]. Nonlinear Anal，2009，71：991－999.

[9] 尹大平，杨明飞. CAT(K)空间中非扩张映射的 Ishikawa 迭代算法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(10)：1－5.

Δ-Convergence and Strong Convergence of Iterative Schemes for Common Fixed Points in CAT(0) Spaces

WANG Xian-tao，　DENG　Lei，　XIAO　Juan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we introduce an iterative sequence of a family of asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces and study the Δ-convergence and strong convergence of the iterative sequences. We obtain the results that the iteration sequence Δ-converges and strongly converges to the common fixed point of the family of asymptotically nonexpansive mappings. The results generalize the corresponding results of other literature in the CAT(0) space.

Key words：asymptotically nonexpansive mapping；common fixed point；Δ-convergence；strong convergence；CAT(0) space

责任编辑　廖　坤