文章编号: 1673-9868(2014)4-0055-04

两类推广的 Roper-Suffridge 算子的性质①

王朝君, 崔艳艳, 朱思峰

周口师范学院 数学与统计学院, 河南 周口 466001

摘要: 讨论两类推广的 Roper-Suffridge 算子保持双全纯映照子族的性质. 从定义出发证明推广的 Roper-Suffridge 算子在 $\mathbb{C}^n$ 中单位球上和复 Banach 空间单位球上保持强 α 次殆星映照及 α 次准凸映照的性质, 进而得到推广的 Roper-Suffridge 算子在 $\mathbb{C}^n$ 中单位球上和复 Hilbert 空间单位球上分别保持强星形性和 α 次准凸性.

关 键 词: 强 α 次殆星映照; α 次准凸映照; Roper-Suffridge 算子

中图分类号: O174.51 **文献标志码:** A

Roper-Suffridge 算子的引入使得人们可以由单位圆盘上的一个正规化局部双全纯映照构造出 $\mathbb{C}^n$ 中单位球上的一个正规化局部双全纯映照, 随后许多学者开始研究 Roper-Suffridge 算子, 并对该算子及其存在域进行了不同程度的推广[1-2]. 本文讨论推广的 Roper-Suffridge 算子保持 α 次准凸映照及强 α 次殆星映照的性质. 文中 D 表示单位圆盘, $S(D)$ 表示 D 上的正规化双全纯映照. X 表示具有范数 $\|\cdot\|$ 的复 Banach 空间, B 表示 X 中的开单位球.

引理 1[3] 设 f 是 D 上的强 α 次殆星映照, P: $\mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是 $k(k \geqslant 2)$ 次齐次多项式.

$$F(z)=(f(z_1)+f'(z_1)P(z_0),\ (f'(z_1))^{\frac{1}{k}}z_0)'$$

其中 $z=(z_1,\ z_0)' \in B^n$, $z_1 \in D$, $z_0=(z_2,\ \cdots,\ z_n)' \in \mathbb{C}^{n-1}$. 幂函数取分支, 使得 $(f'(0))^{\frac{1}{k}}=1$, 则

$$\bar{z}'(DF(z))^{-1}F(z)=$$
$$\overline{z_1}\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}-\frac{1-r}{r}P(z_0)\overline{z_1}+\left[1-r\frac{f(z_1)f''(z_1)}{(f'(z_1))^2}+(1-r)P(z_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right]\|z_0\|^2$$

引理 2[4] 设 $f \in H(D,\ D)$, 则 $|f'(z)| \leqslant \dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ $(z \in D)$.

引理 3[5] 设 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m \geqslant 2$, 若 $f \in S(D)$, 则

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}-m\bar{z}\right| \leqslant m+2 \qquad z \in D$$

引理 4[6] 设 $f \in S(D)$, $F(x)=\dfrac{f(T_u(x))}{T_u(x)}x$ $(u \in \partial B)$, 则 $F(x)$ 是 B 上的正规化双全纯映照.

定理 1 在引理 1 的条件下, 若 $\|P\| \leqslant \dfrac{2c(1-\alpha)}{(1+c)(k+2)}$, 则 $F(z)$ 是 B^n 上的强 α 次殆星形映照.

证 由文献[7]中强 α 次殆星形映照的定义, 需证

---

① 收稿日期: 2012-09-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271359, U1204618); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(14B110015, 14B110016); 河南省科技厅科技发展计划项目(102400450003).

作者简介: 王朝君(1981-), 男, 河南淮阳人, 讲师, 主要从事多复变函数论、微分方程的研究.

通信作者: 朱思峰, 副教授, 博士.

$$\left|\left\{\frac{1}{\|z\|^2}\bar{z}'[DF(z)]^{-1}F(z)-\alpha\right\}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|<\frac{2c}{1-c^2} \tag{1}$$

若 $z_0=0$，则(1)式显然成立．若 $z_0\neq 0$，显然 F 在 $\overline{B^n}$ 上全纯．取 $\lambda\in\overline{D}\backslash\{0\}$，令 $z=\lambda u$ ($u\in\mathbb{C}^n$)，$\|u\|=1$，则

$$\left|\left\{\frac{1}{\|z\|^2}\bar{z}'[DF(z)]^{-1}F(z)-\alpha\right\}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right|<\frac{2c}{1-c^2}$$

即

$$\left|\frac{1-c^2}{2c}\left\{\frac{1}{\lambda}\bar{u}'[DF(\lambda u)]^{-1}F(\lambda u)-\alpha\right\}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}\right|<1$$

又因 $\frac{1-c^2}{2c}\left\{\frac{1}{\lambda}\bar{u}'[DF(\lambda u)]^{-1}F(\lambda u)-\alpha\right\}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}$ 关于 λ 全纯，由全纯函数的最大模原理知它在 $|\lambda|=1$ 上达到最大值，故只需证(1)式对 $\|z\|=1$，$z_0\neq 0$ 成立即可．令 $\frac{1}{k}=r$，则 $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$．令

$$p(z_1)=\frac{1-c^2}{2c}\left[\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}-\alpha\right]\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{2c}$$

则 $|p(z_1)|<1$，经计算可知

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{f(z_1)}{z_1f'(z_1)}=\frac{2c}{1-c^2}p(z_1)+\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+c^2}{1-c^2}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{f(z_1)f''(z_1)}{(f'(z_1))^2}=\frac{-2c}{1-c^2}[p(z_1)+z_1p'(z_1)]-\frac{2c^2}{1-c^2}$$

$$\begin{aligned}
&[\bar{z}'(DF(z))^{-1}F(z)-\alpha]\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{1-c^2}=\\
&|z_1|^2\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+c^2}{1-c^2}+\frac{2c}{1-c^2}p(z_1)\right]-\frac{1-r}{r}p(z_0)\overline{z_1}\frac{1}{1-\alpha}+\\
&\left\{\frac{1}{1-\alpha}+r\left[\frac{2c}{1-c^2}(p(z_1)+z_1p'(z_1))+\frac{2c^2}{1-c^2}\right]+\frac{1}{1-\alpha}(1-r)p(z_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\right\}\|z_0\|^2-\frac{1+c^2}{1-c^2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}=\\
&(|z_1|^2-1)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)-\frac{1-r}{r}p(z_0)\overline{z_1}\frac{1}{1-\alpha}+\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{2c^2}{1-c^2}r\right)\|z_0\|^2+\\
&\frac{1-r}{1-\alpha}p(z_0)\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}\|z_0\|^2+r\frac{2c}{1-c^2}(p(z_1)+z_1p'(z_1))\|z_0\|^2+|z_1|^2\frac{2c}{1-c^2}p(z_1)=\\
&\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{2c^2}{1-c^2}r-\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\|z_0\|^2+\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}p(z_0)\left[r\|z_0\|^2\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}-\overline{z_1}\right]+\\
&r\frac{2c}{1-c^2}(p(z_1)+z_1p'(z_1))\|z_0\|^2+|z_1|^2\frac{2c}{1-c^2}p(z_1)=\frac{2c^2}{1-c^2}(r-1)\|z_0\|^2+\\
&\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}p(z_0)\left[r\|z_0\|^2\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}-\overline{z_1}\right]+\frac{2c}{1-c^2}[r\|z_0\|^2+|z_1|^2]p(z_1)+\\
&\frac{2c}{1-c^2}r\|z_0\|^2z_1p'(z_1)
\end{aligned} \tag{2}$$

由引理 2 及 $(1-r)|z_1|^2-2r|z_1|+r\geqslant r(|z_1|-1)^2\geqslant 0$ 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2c}{1-c^2}[r\|z_0\|^2+|z_1|^2]p(z_1)+\frac{2c}{1-c^2}r\|z_0\|^2z_1p'(z_1)\right|<\\
&\frac{2c}{1-c^2}\left\{[r\|z_0\|^2+|z_1|^2]|p(z_1)|+r\|z_0\|^2|z_1|\frac{1-|p(z_1)|^2}{1-|z_1|^2}\right\}\leqslant\\
&\frac{2c}{1-c^2}\{[r\|z_0\|^2+|z_1|^2]|p(z_1)|+2r|z_1|(1-|p(z_1)|)\}=\\
&\frac{2c}{1-c^2}\{[r\|z_0\|^2+|z_1|^2](|p(z_1)|-1)+|z_1|^2+r\|z_0\|^2+2r|z_1|(1-|p(z_1)|)\}=\\
&\frac{2c}{1-c^2}\{[(1-r)|z_1|^2-2r|z_1|+r](|p(z_1)|-1)+|z_1|^2+r\|z_0\|^2\}\leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{2c}{1-c^2}(|z_1|^2+r\|z_0\|^2) \tag{3}$$

又由 $\|P\|\leqslant\frac{2c(1-\alpha)}{(1+c)(k+2)}=\frac{2cr(1-\alpha)}{(1+c)(1+2r)}$ 及引理 3 可得

$$\left|\frac{2c^2}{1-c^2}(r-1)\|z_0\|^2+\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}p(z_0)\left[r\|z_0\|^2\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}-\overline{z_1}\right]\right|\leqslant$$

$$\frac{2c^2}{1-c^2}(1-r)\|z_0\|^2+\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}\|P\|\;\|z_0\|^{\frac{1}{r}}\left|r(\|z_0\|^2\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)}-2\overline{z_1})+(2r-1)\overline{z_1}\right|\leqslant$$

$$\frac{2c^2}{1-c^2}(1-r)\|z_0\|^2+\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}\|P\|\;\|z_0\|^2[4r+(1-2r)]\leqslant$$

$$\frac{2c^2}{1-c^2}(1-r)\|z_0\|^2+\frac{1}{r}\frac{1-r}{1-\alpha}\frac{2cr(1-\alpha)}{(1+c)(1+2r)}(1+2r)\|z_0\|^2=\frac{2c}{1-c^2}(1-r)\|z_0\|^2 \tag{4}$$

由(2),(3),(4) 式可证(1) 式成立.

推论 1　设 f 是 D 上的强星形映照，$P:\mathbb{C}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{C}$ 是 $k(k\geqslant 2)$ 次齐次多项式.

$$F(z)=(f(z_1)+f'(z_1)P(z_0),\ (f'(z_1))^{\frac{1}{k}}z_0)'$$

其中 $z=(z_1,z_0)'\in B^n$，$z_0=(z_2,\cdots,z_n)'\in\mathbb{C}^{n-1}$，$z_1\in D$. 幂函数取分支，使得$(f'(0))^{\frac{1}{k}}=1$，若 $\|P\|\leqslant\frac{2c}{(1+c)(k+2)}$，则 $F(z)$ 是 B^n 上的强星形映照.

定理 2　若 f 是 D 上的 α 次准凸映照，$F(x)=\frac{f(T_u(x))}{T_u(x)}x\ (u\in\partial B)$，则 $F(x)$ 是 B 上的 α 次准凸映照.

证　令 $\omega=F(x)$，则 $T_u(\omega)=f(T_u(x))$，又由于 f 是双全纯的，则 $T_u(x)=f^{-1}(T_u(\omega))$，于是

$$\omega=F(x)=\frac{f(f^{-1}(T_u(\omega)))}{T_u(x)}x=\frac{T_u(\omega)}{T_u(x)}x$$

则 $x=F^{-1}(w)=\frac{T_u(x)}{T_u(\omega)}\omega=\frac{f^{-1}(T_u(\omega))}{T_u(\omega)}\omega$. 又由引理 4 知，对任意的 $\eta\in X$ 有

$$(DF(x))^{-1}\eta=DF^{-1}(w)\eta=$$

$$\frac{f^{-1}(T_u(\omega))}{T_u(\omega)}\eta+\frac{(f^{-1})'(T_u(\omega))T_u(\eta)T_u(\omega)-f^{-1}(T_u(\omega))T_u(\eta)}{(T_u(\omega))^2}\omega$$

若

$$\eta=F(x)-F(\xi x)=\omega-\frac{f(T_u(\xi x))}{T_u(\xi x)}\xi x=\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)}x$$

$$T_u(\eta)=f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))$$

则

$$(DF(x))^{-1}\eta=\frac{T_u(x)}{f(T_u(x))}\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)}x+$$

$$\frac{\frac{1}{f'(T_u(x))}T_u(\eta)f(T_u(x))-T_u(x)T_u(\eta)}{(f(T_u(x)))^2}\frac{f(T_u(x))}{T_u(x)}x=$$

$$\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{f(T_u(x))}x\frac{f(T_u(x))}{T_u(x)f'(T_u(x))}=\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)f'(T_u(x))}x$$

$$T_x\{(DF(x))^{-1}[F(x)-F(\xi x)]\}=T_x\left[\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)f'(T_u(x))}x\right]=$$

$$\frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)f'(T_u(x))}\|x\|$$

$$\mathrm{Re}\ T_x\{(DF(x))^{-1}[F(x)-F(\xi x)]\}=\mathrm{Re}\ \frac{f(T_u(x))-f(\xi T_u(x))}{T_u(x)f'(T_u(x))}\|x\|\geqslant\alpha(1-\mathrm{Re}\ \xi)\|x\|$$

由文献[8] 的定义 1.1.26 知 $F(x)$ 是 B 上的 α 次准凸映照，若取 $\alpha=0$ 即为准凸映照.

推论 2　若 f 是 D 上的 α 次准凸映照，

$$F(z)=\left(f(z_1),\ \frac{f(z_1)}{z_1}z_0\right)\qquad z=(z_1,\ z_0)\in B^n$$

则 $F(z)$ 是复 Hilbert 空间单位球 B^n 上的 α 次准凸映照.

证 定理2中若 X 是 n 维复 Hilbert 空间,则由 Riesz 表示定理知 $T_u(x)=\langle x,u\rangle$,取 $u=(1,0,\cdots,0)$,$x=(z_1,\cdots,z_n)=(z_1,z_0)$,则 $T_u(x)=z_1$,于是定理2中

$$F(x)=\frac{f(T_u(x))}{T_u(x)}x=\frac{f(z_1)}{z_1}z=\left(f(z_1),\ \frac{f(z_1)}{z_1}z_0\right)$$

故推论2成立.

参考文献:

[1] 袁国常,雷国营,刘晚香. 复 Banach 空间上连续线性算子的 G-K 性质 [J]. 西南大学学报:自然科学版,2012,34(2):87-91.

[2] 颜丽佳. 半 E-凸函数的一些新性质 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2005,30(2):215-217.

[3] 王建飞,刘太顺. 全纯映射子族上改进的 Roper-Suffridge 算子 [J]. 数学年刊,2010,31A(4):487-496.

[4] AHLFORS L V. Complex Analysis [M]. New York:McGraw-Hill,1953.

[5] MUIR J R. A Class of Loewner Chain Preserving Extension Operators [J]. J Math Anal Appl,2008,337(1):862-879.

[6] 刘小松. 多复变数几何函数论中某些双全纯映照子族的性质 [D]. 合肥:中国科学技术大学,2004.

[7] CHUAQUI M. Applications of Subordination Chains to Starlike Mappings in C^n [J]. Pacif J Math,1995,168(1):33-48.

[8] 徐庆华. 多复变数双全纯映照子族的性质及其之间的关系 [D]. 合肥:中国科学技术大学,2006.

Property of Two Kinds of Generalized Roper-Suffridge Extension Operators

WANG Chao-jun, CUI Yan-yan, ZHU Si-feng

Department of Mathematics and Statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 466001, China

Abstract: In this paper, the authors discuss that two kinds of generalized Roper-Suffridge extension operators preserve the property of the subclasses of biholomorphic mappings and, from the definition, prove the fact that the extended operators preserve the properties of strong and almost starlike mappings of order α and quasi-convex mappings of order α on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ and in the complex Banach space. Then it is shown that the generalized operator keeps strongly starlikeness and quasi-convexity of order α on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ and in complex Hilbert space, respectively.

Key words: strong and almost starlike mappings of order α; quasi-convex mappings of order α; Roper-Suffridge operator

责任编辑 廖 坤