第 36 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014 年 4 月
Vol. 36 No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr. 2014

文章编号：1673-9868(2014)4-0052-03

准模糊图拟阵的子拟阵①

陈娟娟，　吴德垠，　夏　军

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：利用准模糊图拟阵的闭、圈好和基好特性，得到 3 个重要的结论：准模糊图拟阵的约束拟阵是准模糊图拟阵；准模糊图拟阵的收缩拟阵是准模糊图拟阵；准模糊图拟阵的 k-截短拟阵是准模糊图拟阵. 这些结论有助于更深入地研究准模糊图拟阵.

关　键　词：模糊拟阵；准模糊图拟阵；子拟阵

中图分类号：O159　　**文献标志码**：A

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 是一个模糊拟阵，$T\subseteq E$，令 $\Psi_T=\{\mu \mid \operatorname{supp}\mu\subseteq T,\ \mu\in\Psi\}$，则 (E,Ψ_T) 是模糊拟阵，称该模糊拟阵为 $\boldsymbol{M}$ 在集合 T 的约束拟阵，记为 $\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$.

定义 2[2]　设 E 是有限集，$\mu\in F(E)$，$A\subseteq E$. 定义模糊集 μ_A 为

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ \mu(x) & x\in A\end{cases}$$

则称 μ_A 为 μ 在集合 A 上的限制.

定义 3[3]　设 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 是闭模糊拟阵，$T\subseteq E$，如果 $(E-T,\Psi/T)$ 是模糊拟阵，则称 $(E-T,\Psi/T)$ 为 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 到集合 $E-T$ 上的收缩，其中

$$\Psi/T=\{\mu\in[0,1]^{X-T} \mid 存在\ \nu_T\in\Theta(\Psi_T)，使得\ \mu\vee\nu_T\in\Psi\}$$

定理 1[2]　设 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 是模糊拟阵，令 $a=\max\{|\operatorname{supp}\mu| \mid \mu 是 (E,\Psi) 的模糊基\}$. 取 $k\leqslant a$ 且 k 为正整数，令 $\Psi_k=\{\mu \mid |\operatorname{supp}\mu|\leqslant k,\ \mu\in\Psi\}$，则 (E,Ψ_k) 是一个模糊拟阵，称为 $\boldsymbol{M}$ 的 k-水平截短.

首先，我们讨论准模糊图拟阵的约束拟阵.

定理 2　设 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 是准模糊图拟阵，$T\subseteq E$，则 $\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$ 是准模糊图拟阵.

证　取 $\mu\in F(T)$，且对任意的 $\nu<\mu$，都有 $\nu\in\Psi_T$. 又因 $\Psi_T\subseteq\Psi$ 以及 $\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$ 是闭模糊拟阵，由文献[4] 的定理 2.2 知 $\mu\in\Psi$，因此 $\mu\in\Psi_T$. 故 $\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$ 是闭模糊拟阵.

设 μ,ν 是 $\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$ 的任意模糊基，则由 $\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$ 的定义知 $\mu,\nu\in\Psi$，$\operatorname{supp}\mu\subseteq T$，$\operatorname{supp}\nu\subseteq T$. 若 $\mu=\nu$，显然 $\operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$. 若 $\operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$，由于 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵，由文献[5] 的定理 1.10 知，存在 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基 μ',ν'，满足 $\mu\leqslant\mu'$，$\nu\leqslant\nu'$. 令 $A=\operatorname{supp}\mu$，若有 $e\in A$，使得 $\mu(e)<\mu'(e)$，则由 Ψ_T 的定义知，$\mu'_A\in\Psi_T$，但 $\mu<\mu'_A$，与 μ 是模糊基矛盾(参见文献[5] 的定义 1.4)，即对任意 $e\in A$，有 $\mu(e)=\mu'(e)=\mu'_A(e)$. 同理，对任意 $e\in A$，有 $\nu(e)=\nu'(e)=\nu'_A(e)$. 由 $A\subseteq\operatorname{supp}\mu'\cap\operatorname{supp}\nu'$ 以及 $\boldsymbol{M}$ 是基好模糊拟阵(参见文献[6] 的定义 6) 知 $\mu=\mu'_A=\nu'_A=\nu$. 由文献[6] 的定理 15 以及定义 7 知，$\boldsymbol{M}_T=(E,\Psi_T)$ 是准模糊图拟阵.

在讨论准模糊图拟阵的收缩拟阵的主要结果之前，我们先讨论下面的两个相关问题：

---

①　收稿日期：2013-01-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61374078)；重庆大学"211 工程"三期创新人才培养计划建设基金资助项目(S-09110).
作者简介：陈娟娟(1987-)，女，山东嘉祥人，硕士研究生，主要从事模糊拟阵的研究.

定理3　设$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，$T\subseteq E$，$(E-T,\Psi/T)$是$\boldsymbol{M}$到集合$E-T$上的收缩，则$(E-T,\Psi/T)$是闭模糊拟阵.

证　对任意的$\mu\in\Psi/T$，存在$\nu\in\Theta(\Psi_T)$，使得$\mu\vee\nu\in\Psi$. 扩展$\mu\vee\nu$成为$\boldsymbol{M}$的一个模糊基$\omega\in\Theta(\Psi)$，显然$\mu\vee\nu\leqslant\omega$，其中$\operatorname{supp}\mu\subseteq E-T$，$\operatorname{supp}\nu\subseteq T$. 由准模糊图拟阵的性质可证$\omega_T=\nu$且$\omega_{E-T}\vee\omega_T=\omega$. 由$\mu\vee\omega_T\leqslant\omega$知，$\mu\leqslant\omega_{E-T}$且$\omega_{E-T}\in\Psi$.

若有$\omega'\in\Psi/T$，使得$\omega_{E-T}<\omega'$，由Ψ/T的定义知，存在$\nu'\in\Theta(\Psi_T)$，使得$\omega'\vee\nu'\in\Psi$. 将$\omega'\vee\nu'$扩展为$\boldsymbol{M}$的模糊基ω^*，使得$\omega'\vee\nu'\leqslant\omega^*$，同理，$\omega_T^*=\nu'$，因此$\omega'\leqslant\omega_{E-T}^*$. 如果$\operatorname{supp}\omega_{E-T}=\operatorname{supp}\omega'$，则存在$e\in\operatorname{supp}\omega_{E-T}$，使得$\omega_{E-T}(e)<\omega'(e)$，由$e\in\operatorname{supp}\omega_{E-T}\subseteq\operatorname{supp}\omega\cap\operatorname{supp}\omega^*$和准模糊图拟阵的性质知$\omega(e)=\omega^*(e)$，但$\omega(e)=\omega_{E-T}(e)<\omega'(e)\leqslant\omega^*(e)$，矛盾. 如果$\operatorname{supp}\omega_{E-T}\neq\operatorname{supp}\omega'$，必有$\operatorname{supp}\omega_{E-T}\subset\operatorname{supp}\omega'$. 由$\omega_{E-T}\vee\omega_T=\omega\in\Theta(\Psi)$和$\omega_{E-T}^*\vee\omega_T^*=\omega^*\in\Theta(\Psi)$知$|\operatorname{supp}\omega|=|\operatorname{supp}\omega^*|$，又由

$$|\operatorname{supp}\omega_{E-T}|<|\operatorname{supp}\omega'|\leqslant|\operatorname{supp}\omega_{E-T}^*|\qquad (E-T)\cap T=\varnothing$$

知

$$|\operatorname{supp}\omega_T|>|\operatorname{supp}\omega_T^*|\qquad |\operatorname{supp}\nu|>|\operatorname{supp}\nu'|$$

这与$\nu,\nu'\in\Theta(\Psi_T)$矛盾. 因此$\omega_{E-T}\in\Theta(\Psi/T)$. 由文献[5]的定理1.10知$(E-T,\Psi/T)$是闭模糊拟阵.

定理4　设$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，$T\subseteq E$，$(E-T,\Psi/T)$是$\boldsymbol{M}$到集合$E-T$上的收缩. 则对任意的$Y\subseteq E-T$，任意的$\mu\in F(Y)$，下面两个论述等价：

(i) $\mu\in\Theta((\Psi/T)_Y)$；

(ii) 存在$\nu\in\Theta(\Psi_T)$，使得$\mu\vee\nu\in\Theta(\Psi_{Y\cup T})$.

证　(i)$\Longrightarrow$(ii) 设$\mu\in\Theta((\Psi/T)_Y)$，由定义知$\mu\in\Psi/T$，$\mu\in[0,1]^Y$并且$T\cap Y=\varnothing$. 由Ψ/T的定义知，存在$\nu\in\Theta(\Psi_T)$使得$\mu\vee\nu\in\Psi$，进而$\mu\vee\nu\in\Psi_{Y\cup T}$.

假设$\mu\vee\nu\notin\Theta(\Psi_{Y\cup T})$，则存在$\omega\in\Theta(\Psi_{Y\cup T})$，使得$\mu\vee\nu<\omega$. 又因$\omega_T\in\Psi_T$且$\nu\leqslant\omega_T$，以及$\nu\in\Theta(\Psi_T)$，由模糊基的定义知$\nu=\omega_T$，从而$\mu<\omega_Y$. 由$\omega_T\vee\omega_Y=\omega=\omega_Y\vee\nu\in\Psi$知$\omega_Y\in(\Psi/T)$，且由$T\cap Y=\varnothing$知$\omega_Y\in(\Psi/T)=(\Psi/T)_Y$，即$\omega_Y\in(\Psi/T)_Y$，与$\mu\in\Theta((\Psi/T)_Y)$矛盾，故$\mu\vee\nu\in\Theta(\Psi_{Y\cup T})$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) 设$\mu\vee\nu\in\Theta(\Psi_{Y\cup T})$，$\nu\in\Theta(\Psi_T)$，则$\mu\in(\Psi/T)_Y$.

由$(E-T,\Psi/T)$的闭性知，存在$\mu^*\in\Theta((\Psi/T)_Y)$，使得$\mu\leqslant\mu^*$. 由收缩和约束拟阵的定义以及$(\Psi/T)_Y\subseteq\Psi_{Y\cup T}$知，可将$\mu^*$扩展为$\Psi_{Y\cup T}$的模糊基$\omega$.

令$A=\operatorname{supp}\mu$，$B=\operatorname{supp}\mu^*$. 由于$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，则由定理2知，$(Y\cup T,\Psi_{Y\cup T})$是准模糊图拟阵. 故对任意$e\in\operatorname{supp}\mu\subseteq\operatorname{supp}(\mu\vee\nu)\cap\operatorname{supp}\omega$有$(\mu\vee\nu)(e)=\omega(e)$. 又由$T\cap Y=\varnothing$，以及$\operatorname{supp}\mu\subseteq Y$和$\operatorname{supp}\nu\subseteq T$知，$\operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu=\varnothing$，$\mu=(\mu\vee\nu)_A=\omega_A\geqslant\mu_A^*$，即$\mu=\mu_A^*$.

如果$A=\operatorname{supp}\mu\neq B=\operatorname{supp}\mu^*$，必有$A\subset B$. 由收缩模糊拟阵的定义知，有$\nu^*\in\Theta(\Psi_T)$，使得$\mu^*\vee\nu^*\in\Psi$. 又由$\mu^*\in\Theta((\Psi/T)_Y)$，$\nu^*\in\Theta(\Psi_T)$以及约束模糊拟阵的定义知，$\mu^*\vee\nu^*\in\Psi_{Y\cup T}$. 则

$$|\operatorname{supp}(\mu^*+\nu^*)|>|\operatorname{supp}(\mu\vee\nu)|$$

与$\mu\vee\nu\in\Theta(\Psi_{Y\cup T})$矛盾，即$A=\operatorname{supp}\mu=B=\operatorname{supp}\mu^*$，故$\mu=\mu^*$，即$\mu$是$(\Psi/T)_Y$的模糊基.

下面，我们讨论准模糊图拟阵的收缩拟阵：

定理5　设$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，$T\subseteq E$，$(E-T,\Psi/T)$是$\boldsymbol{M}$到集合$E-T$上的收缩，则$(E-T,\Psi/T)$是准模糊图拟阵.

证　设μ是$(E-T,\Psi/T)$的模糊基，取$Y=E-T$，则由定理4知，存在$\nu\in\Theta(\Psi_T)$，使得$\mu\vee\nu$是$\boldsymbol{M}$的模糊基. 不妨设$\eta=\mu\vee\nu$，由$\operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu=\varnothing$知$\eta_{E-T}=\mu$. 因此，对$(E-T,\Psi/T)$的任意两个模糊基$\mu_1$和$\mu_2$，分别存在$\boldsymbol{M}$的两个模糊基$\omega$和$\nu$，使得$\mu_1=\omega_{E-T}$，$\mu_2=\nu_{E-T}$. 又因$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，其基满足基好性，故$(E-T,\Psi/T)$的基满足基好性. 则由定理3以及文献[6]的定理15知$(E-T,\Psi/T)$是准模糊图拟阵.

最后，我们讨论准模糊图拟阵的k-水平截短拟阵：

定理6　设$\boldsymbol{M}=(E,\Psi)$是准模糊图拟阵，(E,Ψ_k)为$\boldsymbol{M}$的k-水平截短拟阵，则(E,Ψ_k)是准模糊图拟阵.

证　设 $\mu \in F(E)$，若对任意的 $\nu < \mu$，都有 $\nu \in \Psi_k$. 由 Ψ_k 的定义知 $\nu \in \Psi$，又因 $\boldsymbol{M}=(E, \Psi)$ 是闭模糊拟阵，由文献[4] 的定理 2.2 知 $\mu \in \Psi$，$\mu \in \Psi$. 若 $|\operatorname{supp}\mu| \geqslant k+1$，令 $a=m(\mu)$，$\omega(x)=\mu(x)-\frac{a}{2}$，则 $\omega < \mu$，由模糊拟阵的定义知 $\omega \in \Psi$，但 $|\operatorname{supp}\omega| \geqslant k+1$，与 $\omega \in \Psi_k$ 矛盾，故 $|\operatorname{supp}\mu| \leqslant k$，$\mu \in \Psi_k$. 由文献[4] 的定理 2.2 知 $\mu \in \Psi(E, \Psi_k)$ 是闭模糊拟阵.

设 μ, ν 是 (E, Ψ_k) 的模糊基，则由 Ψ_k 的定义知 $\mu, \nu \in \Psi$ 且 $|\operatorname{supp}\mu| \leqslant k$，$|\operatorname{supp}\nu| \leqslant k$.

如果 $\mu=\nu$，显然 $\operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$. 反之，若 $\operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$，由于 $\boldsymbol{M}$ 为闭模糊拟阵，则存在 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基 μ', ν'，满足 $\mu \leqslant \mu'$，$\nu \leqslant \nu'$. 令 $A=\operatorname{supp}\mu$，若有 $e \in A$，使得 $\mu(e) < \mu'(e)$，则由 Ψ_k 的定义知 $\mu'_A \in \Psi_k$. 但 $\mu(e) < \mu_A'(e)$，与 μ 是模糊基矛盾，即对任意 $e \in A$ 都有 $\mu(e)=\mu'(e)$. 同理，也有 $\nu(e)=\nu'(e)$.

如果存在 $e \in \operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$ 使得 $\mu(e) \neq \nu(e)$，不妨设 $\mu(e) < \nu(e)$，则由 $\mu'(e)=\mu(e) < \nu(e)=\nu'(e)$ 知，此与 $\boldsymbol{M}$ 为准模糊图拟阵矛盾. 因此 (E, Ψ_k) 是基好的.

由文献[6] 的定理 15 以及定义 7 知，(E, Ψ_k) 是准模糊图拟阵.

参考文献：

[1] 李传东，吴德垠. 模糊子拟阵 [J]. 重庆大学学报：自然科学版，2004，27(2)：68－72.

[2] 李小南，李海洋，李生刚. 模糊拟阵研究 [J]. 工程数学学报，2009，26(3)：431－436.

[3] ZHANG Xiao-jing，LI Sheng-gang. The Restrictions and the Contraction of Closed Uniform Regular G-V Fuzzy Matroids [J]. Energy Procedia，2011，13(6)：1958－2963.

[4] 李小南，李生刚. 闭模糊拟阵的特征 [J]. 模糊系统与数学，2007，21(5)：48－53.

[5] GOETSCHEL R J，VOXMAN W. Bases of Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems，1989，31：253－261.

[6] 吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报：自然科学版，1996，19(3)：100－109.

[7] 李永红. 模糊圈的秩 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(3)：21－23.

On Submatroids of Quasi-Fuzzy Graph Matroids

CHEN Juan-juan，　WU De-yin，　XIA　Jun

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：With the help of their close，good-cycle and good-base properties，three important results are obtained about quasi-fuzzy graph matroids in this paper，i. e. the restriction matroids of quasi-fuzzy graph matroids are quasi-fuzzy graph matroids；the contraction matroids of quasi-fuzzy graph matroids are quasi-fuzzy graph matroids；and the k-truncations of quasi-fuzzy graph matroids are also quasi-fuzzy graph matroids.

Key words：fuzzy matroid；quasi-fuzzy graph matroid；submatroid

责任编辑　廖　坤