文章编号：1673-9868(2014)4-0047-05

具有奇优美性的一类龙图[①]

刘信生，　刘元元，　姚　兵，　缑　艳，　李　峰

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：根据复杂网络研究的需要，定义了(k, m)-龙图和一致(k, m)-龙图，这类图具有优美性、奇优美性等性质. 主要研究了这类龙图的奇优美性，定义了这类龙图的奇优美标号，其证明方法可算法化.

关　键　词：龙图；奇优美标号；奇优美图

中图分类号：O157.5　　　　**文献标志码**：A

随着计算机科学的迅速发展，图的染色问题和标号问题成为图论发展最活跃的分支[1-4]，它们在编码理论、通讯网络、物流等方面都有一定的应用. 1963年，Rosa研究了Ringel猜想：对预先给定的一棵有$n+1$个顶点的树T，每个有$2n+1$个顶点的完全图K_{2n+1}可以被分解为$2n+1$棵有$n+1$个顶点的树，且这些树均同构于T. Rosa发现：当给定的树是优美树时，Ringel猜想成立. 然而，Ringel猜想至今没有被证明或否定. 由于图的优美标号的无规律性，优美树猜想至今是一个吸引人的困难问题. 奇优美是在优美的基础上产生的一个分支. Gnanajothi研究了奇优美图[5]，且提出著名的奇优美树猜想：所有的树都是奇优美树[5]. 本文通过分划和构造的方法证明了一类龙图的奇优美性.

如果图G含有一个边子集S，使得$G-S$的任何2个分支都同构，则称G为边对称图，这类图可以作为无标度网络、层次网络和自相似网络等的研究模型. 为叙述简便，用记号$[m, n]^o$表示连续的奇数集合，即$\{m, m+2, \cdots, n\}$，其中m和n均为奇数. 我们把度数为1的顶点称为叶子. 文中所考虑的图均为有限、无向简单图. (p, q)-图G是指有p个顶点和q条边的图. 文中没有定义的术语和符号均采用于文献[6]. 对于给定的(p, q)-图G，有个映射$f: V(G) \longrightarrow [0, q]$，我们定义边$uv \in E(G)$的标号为$|f(u)-f(v)|$，为简便直观，特记为$f(uv)=|f(u)-f(v)|$.

定义1[7]　对于给定的(p, q)-图G，如果存在一个映射$f: V(G) \longrightarrow [0, q]$，使得$f(E(G))=[1, q]$，则称$f$是$G$的一个优美标号，也称$G$为优美图. 此外，若$G$是具有顶点二部划分$(X, Y)$的集有序图，且$f$满足$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$，则称$f$是$G$的一个集有序优美标号.

定义2[7]　对于给定的(p, q)-图G，如果存在一个映射$f: V(G) \longrightarrow [0, 2q-1]$，使得$|f(V(G))|=p$和$f(E(G))=[1, 2q-1]^o$，则称$f$是$G$的一个奇优美标号，称$G$为奇优美图. 此外，若$G$是具有顶点二部划分$(X, Y)$的二部图，且$f$满足$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$，则称$f$是$G$的一个集有序奇优美标号[8].

定义3[9]　给定整数$m \geqslant 2$和$k \geqslant 1$. 对$r \in \{1, \cdots, k\}$，简单连通图$G_1, G_2, \cdots, G_m$有顶点$y_{1,r} \in$

① 收稿日期：2013-03-13
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61163054，61163037)；甘肃省自然科学基金(3ZS051-A25-025).
作者简介：刘信生(1956-)，男，河南光山人，教授，主要从事图论及其应用的研究.
通信作者：刘元元，硕士研究生.

$V(G_1)$，$x_{m,r}\in V(G_m)$，以及顶点 $x_{i,r}, y_{i,r}\in V(G_i)(i\{2,\cdots,m-1\})$. 在 G_i 中，某些顶点 $x_{i,r}$ 与 $y_{i,r}$ 可能相同. 分别重合顶点 $y_{i,n-k+t}$ 与顶点 $y_{i+1,t}(i\in\{1,\cdots,m-1\}, t\in\{1,\cdots,k\})$ 后所得到的图称为(k,m)-龙图，记为 $G=k[\overline{G_iG_{i+1}}]_{i=1}^{m-1}$. 如果 $G_i\cong H(i\in\{1,\cdots,m\})$，则称 G 为一致(k,m)-龙图，特记为 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$.

定义 4 当 $H=K_{l,n}(l,n\geqslant 1)$ 时，设(X_i, Y_i)是 $K_{l,n}$ 的第 i 个拷贝 $K^i_{l,n}$ 的顶点集 $V(K^i_{l,n})$ 的二部划分，且 $X_i=\{x_{i,1}, x_{i,2},\cdots,x_{i,l}\}$，$Y_i=\{y_{i,1}, y_{i,2},\cdots,y_{i,n}\}$，$i\in\{1,\cdots,m\}$. 对 $j\in\{1,\cdots,k\}$，$k\in\{1,\cdots,n\}$ 和 $i\in\{1,\cdots,m-1\}$，将 $K^i_{l,n}$ 的顶点 $y_{i,n-k+j}\in Y_i$ 与 $K^{i+1}_{l,n}$ 的顶点 $y_{i+1,j}\in Y_{i+1}$ 重合，得一致(k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$. G 是二部图，它的顶点集 $V(G)$ 的二部划分为(X, Y)，其中 $X=\bigcup_{i=1}^{m}X_i$，$Y=\bigcup_{i=1}^{m}Y_i$.

引理 1 当 $H=K_{l,n}(l\in\{1,\cdots,n\})$ 时，一致(k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}(m\geqslant 2, k\geqslant 1)$ 承认集有序奇优美标号.

证 使用定义 4 及其符号. 令 $q=|E(G)|$，则 $q=lmn$. 给一致(k,m)-龙图 G 中每个子图 $K^i_{l,n}$ 的顶点标号，也就是给一致龙图 G 定义一个标号函数 f 为:

$$f(x_{i,j})=2[(i-1)(nl-n+k)+n(j-1)]\qquad j\in\{1,\cdots,l\},\ i\in\{1,\cdots,m\}$$

$$f(y_{i,t})=(2q-1)-2(i-1)(n-k)-2(t-1)\qquad t\in\{1,\cdots,n\},\ i\in\{1,\cdots,m\}$$

因为一致龙图 G 中子图 $K^i_{l,n}$ 的顶点 $y_{i,n-k+j}$ 与子图 $K^{i+1}_{l,n}$ 的顶点 $y_{i+1,j}$ 重合，则对 $j\in\{1,\cdots,k\}$ 和 $i\in\{1,\cdots,m-1\}$，有

$$\begin{aligned}f(y_{i,n-k+j})=&(2q-1)-2(i-1)(n-k)-2(n-k+j-1)=\\&(2q-1)-2i(n-k)-2(j-1)=f(y_{i+1,j})\end{aligned}\tag{1}$$

对每个 $i\in\{1,\cdots,m-1\}$，有

$$\begin{aligned}&f(x_{i,t})<f(x_{i,t+1})\qquad t\in\{1,\cdots,l-1\}\\&f(x_{i,l})=2i(nl-n+k)-2(nl-n+k)+n(l-1)<\\&\qquad 2i(nl-n+k)=f(x_{i+1,1})\\&f(y_{i,t})>f(y_{i,t+1})\qquad t\in\{1,\cdots,n-1\}\end{aligned}\tag{2}$$

根据(1)式，$f(y_{i,n})=f(y_{i+1,k})$，$i\in\{1,\cdots,m-1\}$. 又因为

$$\begin{aligned}f(y_{m,n})-f(x_{m,l})=&(2q-1)-2(m-1)(n-k)-2(n-1)-2[(m-1)(nl-n+k)+n(l-1)]=\\&2(q-lmn)+1=1>0\end{aligned}\tag{3}$$

说明 $f(x_{i,j})<f(y_{s,t})$ 对任意的 $x_{i,j}\in X$ 和 $y_{s,t}\in Y$ 成立，即 $f(X)<f(Y)$. 进一步，每一条边 $x_{i,j}y_{i,t}\in E(K^i_{l,n})$ 的标号满足

$$\begin{aligned}f(x_{i,j}y_{i,t})=&|f(x_{i,j})-f(y_{i,t})|=f(y_{i,t})-f(x_{i,j})=\\&(2q-1)-2(i-1)(n-k)-2(t-1)-2[(i-1)(nl-n+k)+n(j-1)]=\\&(2q-1)-2nl(i-1)-2[t-1+n(j-1)]\end{aligned}\tag{4}$$

对 $K^i_{l,n}(i\in\{1,\cdots,m\})$ 的任意 2 条边 $x_{i,j}y_{i,t}$ 和 $x_{i,j'}y_{i,t'}$，如果 $f(x_{i,j}y_{i,t})=f(x_{i,j'}y_{i,t'})$，根据(4)式，得 $t-1+n(j-1)=t'-1+n(j'-1)$，或 $n(j-j')=t'-t$. 由于 $t', t\in\{1,\cdots,n\}$，有 $|t'-t|<n$，以及 $j\neq j'$，则 $n<|n(j-j')|=|t'-t|<n$，矛盾. 则 $K^i_{l,n}$ 的边标号集为

$$\begin{aligned}f(E(K^i_{l,n}))=&[(2q-1)-2inl+2, (2q-1)-2(i-1)nl]^o=\\&[2nl(m-i)+1, 2nl(m-i+1)-1]^o\end{aligned}$$

从而有

$$f(E(G))=\bigcup_{i=1}^{m}f(E(K^i_{l,n}))=\bigcup_{i=1}^{m}[2nl(m-i)+1, 2nl(m-i+1)-1]^o=[1, 2q-1]^0$$

因此，f 是一致(k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$ 的集有序奇优美标号. 图 1 是一致$(2,3)$-龙图 $G=\widehat{HH}_{(2,3)}$，其中 $H=K_{3,4}$.

引理 2　完全二部分图 $K_{l,n}(l,n\geqslant 1)$ 承认集有序奇优美标号.

定理 1　任给整数 $q>0$，存在具有集有序奇优美标号的 q 条边的龙图.

证　对给定的整数 $q>0$，以下用 $H=K_{l,n}(l,n\geqslant 1)$ 来构造具有 q 条边的 (k,m)-龙图 F.

情形 1　当 $q=mnl$ 和 $m\geqslant 2$ 时，根据引理 1，可构造出具有集有序奇优美标号的一致 (k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}(k\geqslant 1)$；当 $q=mnl$ 和 $m=1$ 时，正是引理 2 的情形.

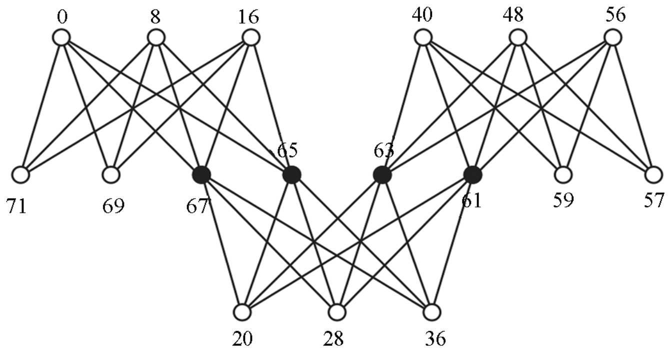

图 1　一致 (2, 3)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(2,3)}$，其中 $H=K_{3,4}$

情形 2　当 $q\neq mnl$ 时，选择 m，使得 $0<q-mnl<nl$. 以下使用定义 4 的符号，且令 $M=q-mnl$.

按照定义 4 构造出具有 mnl 条边的一致 (k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$，具有 M 条边的图记作 K^*，且使得 $K^*\subset K_{l,n}^{m+1}$. 令 K^* 的顶点集二部分划分为 (X^*,Y^*)，其中

$$X^*=\{x_{m+1,1},x_{m+1,2},\cdots,x_{m+1,a}\}$$
$$Y^*=\{y_{m+1,1},y_{m+1,2},\cdots,y_{m+1,b}\}$$

因为 $0<M<nl$，故 $a,b\geqslant 1$. 定义 m 个 $K_{l,n}^{i}$ 的顶点标号函数 f 为：

$$f(x_{i,j})=2[(i-1)(nl-n+k)+n(j-1)]\qquad j\in\{1,\cdots,l\},i\in\{1,\cdots,m\}$$
$$f(y_{i,t})=(2q-1)-2(i-1)(n-k)-2(t-1)\qquad t\in\{1,\cdots,n\},i\in\{1,\cdots,m\}$$

注意到

$$\max f(X)=f(x_{m,l})=2[(m-1)(nl-n+k)+n(l-1)]$$
$$\min f(Y)=f(y_{m,n})=(2q-1)-2(m-1)(n-k)-2(n-1)$$

一致 (k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$ 的最小边标号为

$$f(x_{m,l}y_{m,n})=f(y_{m,n})-f(x_{m,l})=2(q-lmn)+1$$

根据引理 1 的证明，若 $i'>i$，则 $f(x_{i,j})<f(x_{i',t})$ 和 $f(y_{i,j})\geqslant f(y_{i',t})$，以及 $f(x_{i,j})<f(y_{s,t})$，说明 $f(X)<f(Y)$. 一致 (k,m)-龙图 $G=\widehat{HH}_{(k,m)}$ 的边标号集合的并等于

$$\bigcup_{i=1}^{m}f(E(K_{l,n}^{i}))=\bigcup_{i=1}^{m}[2nl(m-i)+1,2nl(m-i+1)-1]^{o}=[2(q-lmn)+1,2q-1]^{0}\tag{5}$$

情形 2.1　若 $M<k$，则取 $K^*=K_{1,M}$，其中

$$X^*=\{x_{m+1,1}\}\qquad Y^*=\{y_{m+1,1},y_{m+1,2},\cdots,y_{m+1,M}\}\qquad E(K^*)=\{x_{m+1,1}y_{m+1,t}\mid t\in\{1,\cdots,M\}\}$$

此时，在 F 中，K^* 的顶点 $y_{m+1,t}$ 与一致 (k,m)-龙图 G 的子图 $K_{l,n}^{m}$ 的顶点 $y_{m,n-k+t}(t\in\{1,\cdots,M\})$ 相重合.

给 K^* 的顶点标号为：

$$f(x_{m+1,1})=2m(nl-n+k)$$
$$f(y_{m+1,t})=(2q-1)-2m(n-k)-2(t-1)\qquad t\in\{1,\cdots,M\}$$

每条边 $x_{m+1,1}y_{m+1,t}\in E(K^*)$ 的标号为

$$f(x_{m+1,1}y_{m+1,t})=2(q-nlm)-2(t-1)-1\tag{6}$$

(6) 式导出 $f(E(K^*))=[1,2(q-lmn)-1]^{0}$. 再结合 (5) 式，得 $f(E(E))=[1,2q-1]^{0}$. 所以，f 是 $(k,$

$m+1)$-龙图 F 的集有序奇优美标号.

情形 2.2 若 $M\in\{k,\cdots,n\}$，则取 $K^*=K_{1,M}$，其中 $X^*=\{x_{m+1,1}\}$ 和 $Y^*=\{y_{m+1,1},y_{m+1,2},\cdots,y_{m+1,M}\}$，$E(K^*)=\{x_{m+1,1}y_{m+1,t}\mid t\in\{1,\cdots,M\}\}$. 其余证明相同于情形 1，可以证明 f 是$(k,m+1)$-龙图 F 的集有序奇优美标号.

情形 2.3 $n<M<lmn$. 设 $K_{l,n}^{m+1}$ 的顶点集二部划分为 $X_{m+1}=\{x_{m+1,1},x_{m+1,2},\cdots,x_{m+1,l}\}$ 和 $Y_{m+1}=\{y_{m+1,1},y_{m+1,2},\cdots,y_{m+1,n}\}$. 给 $K_{l,n}^{m+1}$ 的顶点标号：

$$f(x_{m+1,j})=2[m(nl-n+k)+n(j-1)]\qquad j\in\{1,\cdots,l\}$$
$$f(y_{m+1,t})=(2q-1)-2m(n-k)-2(t-1)\qquad t\in\{1,\cdots,n\}$$

注意到

$$\begin{aligned}f(y_{m+1,n})-f(x_{m+1,l})&=(2q-1)-2m(n-k)-2(n-1)-2[m(nl-n+k)+n(l-1)]=\\&=2M-1-2(nl-1)=2(M-nl)+1\leqslant-2+1<0\end{aligned}\tag{7}$$

故选 K^* 的边集合为 $E(K^*)=\{x_{m+1,j}y_{m+1,t}\mid f(y_{m+1,t})-f(x_{m+1,j})\geqslant 1,j\in\{1,\cdots,l\},t\in\{1,\cdots,n\}\}\subset E(K_{l,n}^{m+1})$. 令 K^* 的顶点集二部划分(X^*,Y^*)为 $X^*=\{x_{m+1,1},x_{m+1,2},\cdots,x_{m+1,a}\}(\alpha\in\{2\cdots,l-1\})$ 和 $Y^*=\{y_{m+1,1},y_{m+1,2},\cdots,y_{m+1,n}\}$. 根据引理 1 的证明，$f(x_{m+1,i}y_{m+1,t})\neq f(x_{m+1,i'}y_{m+1,t'})$ 对不同的边 $x_{m+1,i}y_{m+1,t}$，$x_{m+1,i'}y_{m+1,t'}\in E(K^*)$ 成立.

由(6)式，$f(x_{m+1,1}y_{m+1,1})=2(q-lmn)-1$. 根据 K^* 的边集合的选取，每一条边 $x_{m+1,i}y_{m+1,t}$ 总满足

$$f(x_{m+1,i}y_{m+1,t})=f(y_{m+1,t})-f(x_{m+1,i})>0$$

$$\begin{aligned}f(x_{m+1,j}y_{m+1,t})&=(2q-1)-2m(n-k)-2(t-1)-2[m(nl-n+k)+n(j-1)]=\\&(2q-1)-2lmn-2[t-1+n(j-1)]\end{aligned}\tag{8}$$

由(7)式，存在边 $x_{m+1,a}y_{m+1,b}\in E(K^*)$，使得 $f(x_{m+1,a}y_{m+1,b})=1$，$b\in\{1,\cdots,n-1\}$. 根据(8)式，有

$$1=f(x_{m+1,a}y_{m+1,b})=f(y_{m+1,b})-f(x_{m+1,a})=(2q-1)-2lmn-2[b-1+n(a-1)]$$

则 $M=b+n(a-1)$. $f(x_{m+1,a-1}y_{m+1,n})=(2q-1)-2lmn-2[n-1+n(a-2)]=2b+1$. 对 $t\in\{1,\cdots,b\}$，

$$\begin{aligned}f(x_{m+1,a}y_{m+1,t})&=(2q-1)-2lmn-2[t-1+n(a-1)]=\\&2[b+n(a-1)]-1-2(nt-1)=2(b-t)+1\end{aligned}\tag{9}$$

根据 $K_{a-1,n}\subset K^*$，$f(E(K_{a-1,n}))=[2b+1,2(q-lmn)-1]^o$ 和(9)式，我们得到

$$|E(K^*)|=b+n(a-1)\qquad f(E(K^*))=[1,2(q-lmn)-1]^o$$

注意到，对 $t\in\{1,\cdots,b\}$，$f(y_{m+1,t})=f(y_{m,n-k+t})$，其中 $y_{m,n-k+t}\in V(K_{l,n}^{m})$. 将 K^* 的顶点 $y_{m+1,t}$ 与一致(k,m)-龙图 G 的子图 $K_{l,n}^{m}$ 的顶点 $y_{m,n-k+t}$ 重合，得到具有 q 条边的$(k,m+1)$-龙图 F，且 f 是 F 的奇优美标号，但不是集有序奇优美标号，因为当 $t\in\{b+1,\cdots,n\}$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x_{m+1,a})-f(y_{m+1,t})&\geqslant f(x_{m+1,a-1})+2n-f(y_{m+1,n})=\\&2n-f(x_{m+1,a-1}y_{m+1,n})=2n-(2b+1)>0\end{aligned}$$

下面构造具有集有序奇优美标号的 q 条边的龙图. 删去 F 的顶点 $x_{m+1,a}$，然后添加新顶点 $w_1,w_2,\cdots,w_b$，再用边连接 w_i 与 $y_{m+1,n}(i\in\{1,\cdots,b\})$，得新龙图 F^*，且 $|E(F^*)|=|E(F)|=q$. 再给新龙图 F^* 的顶点 w_i 标号 $h(w_i)=f(x_{m+1,a-1})+2i(i\in\{1,\cdots,b\})$，其余的顶点标号与 $V(F)\setminus\{x_{m+1,a}\}$ 的顶点标号相同. 对 $i\in[1,b]$，有

$$h(w_iy_{m+1,n})=h(y_{m+1,n})-h(w_i)=f(y_{m+1,n})-f(x_{m+1,a-1})-2i=2(b-i)+1$$

与(9)式相等，即 h 是 F^* 的奇优美标号. 由于 F^* 的顶点集二部划分(S,U)为 $S=(X^*\setminus\{x_{m+1,a}\})\cup\{w_1,w_2,\cdots,w_b\}$ 和 $U=Y^*$，又因为 $f(X^*\setminus\{x_{m+1,a}\})<f(Y^*)$，则得 $h(S)<h(U)$，说明 h 是新龙图 F^* 的集有序奇优美标号. 图 2 为定理 1 的一个解释例子.

推论 1 任给整数 $\Delta,q>0$，存在最大度为 Δ 和 q 条边的集有序奇优美(k,m)-龙图.

证 当 $\Delta=2\beta$ 时，取 $H=K_{\beta,n}(n\in\{\beta,\cdots,\Delta\})$. 根据定理 1，可得到具有集有序奇优美标号的 q 条边

的龙图 F^*．当 $\Delta=2\beta+1$ 时，取 $H=K_{\beta,2\beta+1}$，同理得到具有集有序奇优美标号的 q 条边的龙图 F^*．

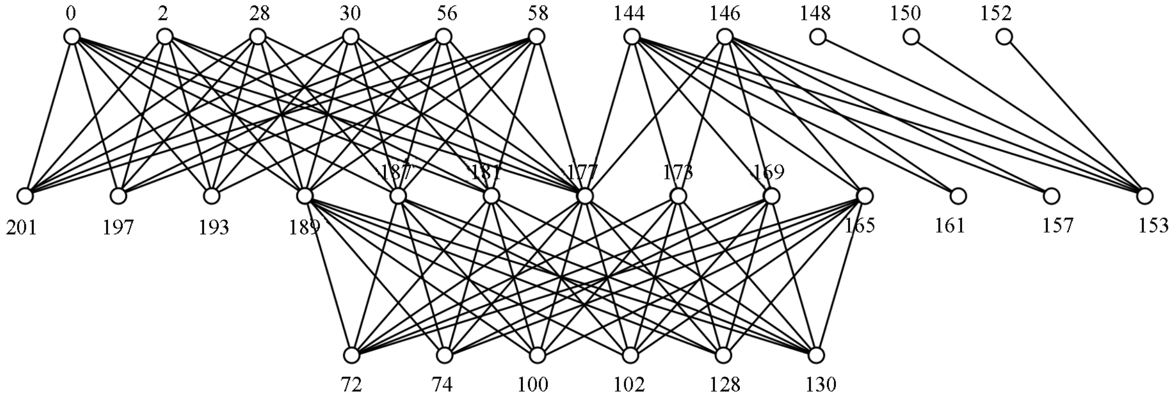

图 2　一个解释定理 1 的例子

参考文献：

[1] LIU Xin-sheng，AN Ming-qiang，GAO Yang. An Upper Bound for the Adjacent-Vertex Distinguishing Acyclic Edge Chromatic Number of a Graph [J]. Acta Mathematicae Sinica，2009，25(1)：137－140.

[2] LIU Xin-sheng，AN Ming-qiang，GAO Yang. An Upper Bound for the Adjacent Vertex-Distinguishing Total Chromatic Number of a Graph [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition，2009，29(2)：343－348.

[3] 于艳华，王文祥，张昆龙. k-优美图与优美图 G_{k-1} 的优美性研究 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(5)：25－28.

[4] 程　辉，李晓辉，姚　兵. 连通多叶图的几种标号 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(10)：94－98.

[5] GNANAJOTHI R B. Topics in Graph Theory [D]. Madurai：Madurai Kamaraj University，1991.

[6] BONDY J A，MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York：The MaCmillan Press ltd，1976.

[7] GALLIAN J A. A Dynamic Survey of Graph Labelling [EB/OL]. [2012－12－20]. http：//emis. matem. unam. mx/journals/EJC/Surveys/dsb. pdf.

[8] YAO Bing，CHENG Hui，YAO Ming，et al. A Note on Strongly Graceful Trees [J]. Ars Combinatoria，2009，92：155－169.

[9] 刘信生，刘元元，姚　兵，等. 龙图的优美性 [J]. 兰州理工大学学报：自然科学版，2013，39(3)：133－135.

A Class of Dragon Graphs with Odd-Gracefulness

LIU Xin-sheng，　LIU Yuan-yuan，　YAO　Bing，
GOU　Yan，　LI　Feng

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Based on the need of research of complex networks，we define a class of graphs，called (k,m)-dragon graphs and uniformly (k,m)-dragon graphs，which are graceful or odd-graceful. We propose and define the notion of odd graceful labelings of dragon graphs and investigate their odd-gracefulness in detail. Our methods can be algorithmic. Through the definition of dragon graphs and proofs of their theorems，we get some simple but useful conclusions.

Key words：dragon graph；odd-graceful labeling；odd-graceful graph

责任编辑　廖　坤