文章编号：1673－9868(2014)4－0043－04

关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 1\ 455y^2$ 的一个初等解法①

杜先存[1]，　万　飞[1]，　赵金娥[2]

1. 红河学院 教师教育学院，云南 蒙自 661199；2. 红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199

摘要：利用同余理论、递归序列，以及 Pell 方程解的性质证明了不定方程 $x^3 - 1 = 1\ 455y^2$ 有整数解 $(x, y) = (1, 0), (4\ 366, \pm 7\ 563)$；而不定方程 $x^3 + 1 = 1\ 455y^2$ 仅有整数解 $(x, y) = (-1, 0)$.

关　键　词：不定方程；整数解；同余式；递归序列

中图分类号：O156.1　　**文献标志码**：A

方程

$$x^3 \pm 1 = Dy^2 \qquad D > 0 \tag{1}$$

是一类重要的不定方程，其整数解已有不少人研究．文献[1]证明了：当 $D > 2$，D 无平方因子且不含 $6k+1$ 型的素因子时，方程(1)无非平凡解．但当 D 含 $6k+1$ 型的素因子时，方程的非平凡解的求解较为困难．文献[2]证明了：当 $0 < D < 100$ 且 D 无平方因子时，方程 $x^3 - 1 = Dy^2$ 仅当 $D = 7, 26, 31, 38, 61$ 时有非平凡解．文献[3]证明了：当 $0 < D < 100$，D 无平方因子且含 $6k+1$ 型素因子时，方程 $x^3 + 1 = Dy^2$ 除 $D = 7, 14, 35, 37, 38, 57, 65, 86, 91$ 外无非平凡解．文献[4－6]分别给出了方程

$$x^3 + 1 = 91y^2 \qquad {}^3 + 1 = 201y^2 \qquad {}^3 - 1 = 26y^2$$

的所有解．本文利用初等方法证明了方程 $x^3 - 1 = 1\ 455y^2$ 仅有 3 组整数解，而方程 $x^3 + 1 = 1\ 455y^2$ 仅有 1 组整数解．

定理 1　不定方程

$$x^3 - 1 = 1\ 455y^2 \tag{2}$$

仅有整数解 $(x, y) = (1, 0), (4\ 366, \pm 7\ 563)$．

证　设 (x, y) 是方程(2)的整数解，由费马小定理可知 $x^3 \equiv x \pmod 3$，故有

$$x^3 - 1 \equiv x - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

则 $\gcd(x-1, x^2+x+1) = 3$．又因为 $x \equiv 1 \pmod 3$，则有 $x^2 + x + 1 \not\equiv 0 \pmod 9$．因 $x^2 + x + 1 \not\equiv 0 \pmod 5$，故方程(2)可给出以下 2 种可能的分解：

情形 1　$x - 1 = 45u^2$，$x^2 + x + 1 = 291v^2$，$y = 3uv$，$\gcd(u, v) = 1$；

情形 2　$x - 1 = 4\ 365u^2$，$x^2 + x + 1 = 3v^2$，$y = 3uv$，$\gcd(u, v) = 1$．

下面讨论这两种情形下方程(2)的整数解．

---

①　收稿日期：2012－09－20

基金项目：云南省教育厅科研基金(2011C121)；江苏省教育科学"十二五"规划课题项目(D201301083)．

作者简介：杜先存(1981－)，女，云南凤庆人，讲师，主要从事初等数论的研究．

情形1 将 $x-1=45u^2$ 代入 $x^2+x+1=291v^2$，整理得 $(90u^2+3)^2+3=291(2v)^2$，即

$$(90u^2+3)^2-291(2v)^2=-3 \tag{3}$$

因为 Pell 方程 $x^2-291y^2=1$ 的基本解为 $(290,17)$，而 $x^2-291y^2=-3$ 由一个结合类得到，设其基本解为 (u_0,v_0)，则由文献[7]的定理2知

$$0<v_0\leqslant\sqrt{\frac{3\times 17^2}{2(290-1)}}=\sqrt{\frac{867}{578}}<2$$

所以 $v_0=1$. 但 $v_0=1$ 时方程 $x^2-291y^2=-3$ 无整数解，所以情形1下方程(2)无整数解.

情形2 将 $x-1=4\ 365u^2$ 代入 $x^2+x+1=3v^2$，整理得 $(8\ 730u^2+3)^2+3=3(2v)^2$，即

$$(2v)^2-3(2\ 910u^2+1)^2=1 \tag{4}$$

因此方程(4)的全部整数解可表示为

$$2v+(2\ 910u^2+1)\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

其中 $(2,1)$ 是 Pell 方程 $x^2-3y^2=1$ 的基本解，因此有 $2\ 910u^2+1=\pm y_n(n\in\mathbb{Z})$，即 $2\ 910u^2=\pm y_n-1$. 又因 $y_{-n}=-y_n$，所以只需考虑

$$2\ 910u^2=y_n-1 \tag{5}$$

由(5)式得，$y_n\equiv 1(\bmod 2\ 910)$，则有 $y_n\equiv 1(\bmod 97)$.

容易验证下列两式成立：

$$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n \qquad x_0=1,\ x_1=2 \tag{6}$$

$$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n \qquad y_0=0,\ y_1=1 \tag{7}$$

对递归序列(7)取模97，得周期为16的剩余类序列：

$$1,4,15,56,15,4,1,0,96,93,82,41,82,93,96,0,1,4,15,\cdots$$

且仅当 $n\equiv 0(\bmod 8)$ 时，有 $y_n\equiv 0(\bmod 97)$；仅当 $n\equiv -1,-7(\bmod 16)$ 时，有 $y_n\equiv -1(\bmod 2\ 910)$；仅当 $n\equiv 1,7(\bmod 16)$ 时，有 $y_n\equiv 1(\bmod 97)$. 所以(5)式要成立，需 $n\equiv 1,7(\bmod 16)$，则只需 $n\equiv\pm 1(\bmod 8)$.

当 $n\equiv 1(\bmod 8)$ 时，设 $n=8m+1(m\in\mathbb{Z})$，则

$$\begin{aligned}2\ 910u^2&=y_{8m+1}-1=\\&x_{8m}+2y_{8m}-1=x_{4m}^2+3y_{4m}^2+4x_{4m}y_{4m}-1=\\&2y_{4m}(2x_{4m}+3y_{4m})=2y_{4m}x_{4m+1}\end{aligned}$$

即

$$1\ 455u^2=y_{4m}x_{4m+1} \tag{8}$$

对递归序列(6)取模15，得周期为6的剩余类序列：

$$2,7,11,7,2,1,2,7,11,\cdots$$

显然，对于任意的 $n\in\mathbb{Z}$，$x_n\not\equiv 0(\bmod 15)$，故

$$x_{4m-1}\not\equiv 0(\bmod 15) \qquad x_{4m+1}\not\equiv 0(\bmod 15) \qquad x_{4m}\not\equiv 0(\bmod 15)$$

对递归序列(6)取模97，得周期为16的剩余类序列：

$$2,7,26,0,71,90,95,96,95,90,71,0,26,7,2,1,2,7,26,\cdots$$

显然，仅当 $n\equiv\pm 4(\bmod 16)$ 时，$x_n\equiv 0(\bmod 97)$，故

$$x_{4m+1}\not\equiv 0(\bmod 97) \qquad x_{4m-1}\not\equiv 0(\bmod 97)$$

因

$$\gcd(y_{4m},x_{4m+1})=\gcd(y_{4m},2x_{4m}+3y_{4m})=\gcd(y_{4m},2x_{4m})=2$$

故(8)式可分解为：

$$x_{4m+1}=2a^2 \qquad y_{4m}=2\ 910b^2 \qquad u=2ab \qquad \gcd(a,b)=1 \tag{9}$$

将(9)式的 $x_{4m+1}=2a^2$ 代入 $x_{4m+1}^2-3y_{4m+1}^2=1$ 中，得 $4a^4-3y_{4m+1}^2=1$. 由文献[8]的定理 19 知 $a=\pm1$，则 $x_{4m+1}=2$，故 $m=0$，此时 $n=1$. 由(5)式得 $2\ 910u^2=y_1-1=0$，则有 $u=0$，从而给出方程(2)的平凡解

$$(x,y)=(1,0)$$

当 $n\equiv-1\pmod 8$ 时，设 $n=8m-1(m\in\mathbb{Z})$，则

$$\begin{aligned}2\ 910u^2=&y_{8m-1}-1=\\&-x_{8m}+2y_{8m}-1=-(x_{4m}^2+3y_{4m}^2)+4x_{4m}y_{4m}-1=\\&2x_{4m}(-x_{4m}+2y_{4m})=2x_{4m}y_{4m-1}\end{aligned}$$

即

$$1\ 455u^2=x_{4m}y_{4m-1}\tag{10}$$

又因

$$\gcd(x_{4m},y_{4m-1})=\gcd(x_{4m},-x_{4m}+2y_{4m})=\gcd(x_{4m},2y_{4m})=1$$

且 $y_{4m-1}\not\equiv0\pmod{97}$，$x_{4m}\not\equiv0\pmod{15}$，故(10)式可分解为

$$x_{4m}=97a^2\qquad y_{4m-1}=15b^2\qquad u=ab\qquad \gcd(a,b)=1\tag{11}$$

将(11)式的 $y_{4m-1}=15b^2$ 代入 $x_{4m-1}^2-3y_{4m-1}^2=1$ 中，得 $x_{4m-1}^2-675b^4=1$. 因 $x_{4m-1}^2-675b^2=1$ 的最小解为(26，1)，故由文献[9]的定理 1 知，方程 $x_{4m-1}^2-675b^4=1$ 至多只有 1 组正整数解 $(x_{4m-1},b^2)=(26,1)$. 故 $m=1$，此时 $n=7$. 由(5)式得 $2\ 910u^2=y_7-1=2\ 910$，则有 $u=\pm1$，从而给出方程(2)的两组整数解

$$(x,y)=(4\ 366,\pm7\ 563)$$

综上所述，不定方程(2)仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(4\ 366,\pm7\ 563)$.

定理 2　不定方程

$$x^3+1=1\ 455y^2\tag{12}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

证　仿照定理 1 的证明知方程(12)可给出以下 2 种可能的分解：

情形 1　$x+1=45u^2$，$x^2-x+1=291v^2$，$y=3uv$，$\gcd(u,v)=1$；

情形 2　$x+1=4\ 365u^2$，$x^2-x+1=3v^2$，$y=3uv$，$\gcd(u,v)=1$.

下面讨论这两种情形下方程(12)的整数解.

情形 1　仿照定理 1 情形 1 的证明知该情形下方程(12)无整数解.

情形 2　将 $x+1=4\ 365u^2$ 代入 $x^2-x+1=3v^2$，整理得 $(8\ 730u^2-3)^2+3=3(2v)^2$，即

$$(2v)^2-3(2\ 910u^2-1)^2=1\tag{13}$$

由定理 1 情形 2 的证明可得 $2\ 910u^2-1=\pm y_n(n\in\mathbb{Z})$，即 $2\ 910u^2=\pm y_n+1$. 又因 $y_{-n}=-y_n$，所以只需考虑

$$2\ 910u^2=y_n+1\tag{14}$$

由定理 1 情形 2 的证明知(14)式要成立，需 $n\equiv-1,-7\pmod{16}$，则只需 $n\equiv\pm1\pmod 8$.

当 $n\equiv1\pmod 8$ 时，设 $n=8m+1(m\in\mathbb{Z})$，则有 $2\ 910u^2=2x_{4m}y_{4m+1}$，即

$$1\ 455u^2=x_{4m}y_{4m+1}\tag{15}$$

仿照定理 1 情形 2(10)式的证明知(15)式不成立，故此时方程(12)无整数解.

当 $n\equiv-1\pmod 8$ 时，设 $n=8m-1(m\in\mathbb{Z})$，则有 $2\ 910u^2=2y_{4m}x_{4m-1}$，即

$$1\ 455u^2=y_{4m}x_{4m-1}\tag{16}$$

仿照定理 1 情形 2(8)式的证明知(16)式给出方程(12)的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$.

综上所述，不定方程(12)仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

参考文献:

[1] 柯　召,孙　琦. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 1 = Dy^2$ [J]. 中国科学, 1981, 24(12): 1453-1457.

[2] 倪谷炎. 关于丢番图方程 $x^3 = Dy^2 + 1$ [J]. 国防科技大学学报: 自然科学版, 1999, 21(5): 109-111.

[3] 杨丽芬,郝立柱. 关于丢番图方程 $x^3 + 1 = Dy^2$ [J]. 哈尔滨师范大学学报: 自然科学版, 1995, 11(4): 132-136.

[4] 杜先存,管训贵,杨慧章. 关于不定方程 $x^3 + 1 = 91y^2$ [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2013, 42(4): 397-399.

[5] 罗　明,黄勇庆. 关于不定方程 $x^3 - 1 = 26y^2$ [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2007, 29(6): 5-7.

[6] 李双志,罗　明. 关于不定方程 $x^3 + 1 = 201y^2$ [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2010, 35(1): 11-14.

[7] 柯　召,孙　琦. 谈谈不定方程 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011.

[8] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989: 271.

[9] WALSH G. Theorem of Ljunggren and the Diophantine Equations $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ or 4 [J]. Arch Math, 1999, 73(2): 504-513.

On a Primary Solution of the Indefinite Equation $x^3 \pm 1 = 1\,455y^2$

DU Xian-cun[1], WAN Fei[1], ZHAO Jin-e[2]

1. College of Teacher Education, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China;

2. College of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China

Abstract: By using congruence, recursive sequence and some properties of the solutions for Pell equation, the following conclusions are proved that the indefinite equation $x^3 - 1 = 1\,455y^2$ has integer solutions $(x, y) = (1, 0)$, and $(4\,366, \pm 7\,563)$, and that the indefinite equation $x^3 + 1 = 1\,455y^2$ has only one integer solution $(x, y) = (-1, 0)$.

Key words: indefinite equation; integer solution; congruence; recursive sequence

责任编辑　廖　坤