第 36 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014 年 4 月
Vol. 36　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2014

文章编号：1673-9868(2014)4-0039-04

纯正群并半群簇和密码群并半群簇的上确界①

王正攀，　潘慧兰

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在完全正则半群簇的子簇格中，首先用等式$((x^0y^0)^0z^0)^0=(x^0(y^0z^0)^0)^0$定义了一个子簇，并举例说明它是完全正则半群簇的真子簇，追加等式$x(yz)^0x(yz)^0=(yz^0)^0x(yz)^0$和$(xy)^0z(xy)^0z=(xy)^0z(x^0y)^0z$，定义前一子簇的又一子簇，并举例说明这 3 个等式相互独立，证明了这 3 个等式恰好给出了纯正群并半群簇和密码群并半群簇的上确界.

关 键 词：完全正则半群；纯正群并半群；密码群并半群；簇；同余

中图分类号：O152.7　　　　**文献标志码**：A

令 S 是完全正则半群，对任意 $a\in S$，a 在 S 的极大子群 H_a(含 a 的 $\mathscr{H}$-类)中的逆元唯一，记为 a^{-1}. 因此，S 可视为(2，1)代数，完全正则半群类形成(2，1)代数簇：

$$a(bc)=(ab)c \qquad a=aa^{-1}a \qquad (a^{-1})^{-1}=a \qquad aa^{-1}=a^{-1}a$$

半群 S 是完全正则的当且仅当它是完全单半群的半格. 因此，通常记完全正则半群 S 为 $S=(Y,S_\alpha)$，其中 Y 是半格，且对任意 $\alpha\in Y$，S_α 为完全单半群. 令 S 为完全正则半群，$E(S)$ 表示 S 的幂等元集. $a^0=aa^{-1}=a^{-1}a$ 表示子群 H_a 的单位元. ε 是 S 上的相等关系，ρ^* 是 S 上由二元关系 ρ 生成的同余. 未介绍的符号及术语参见文献[1-2].

以下刻画纯正群并半群簇 $\mathscr{O}$ 和密码群并半群簇 $\mathscr{BG}$ 在完全正则半群簇的子簇格中的上确界. 据文献[2]中定理 Ⅱ.5.3 和定理 Ⅱ.8.1，作为完全正则半群簇的子簇，$\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{BG}$ 显然均包含于如下定义的完全正则半群簇中：

$$((x^0y^0)^0z^0)^0=(x^0(y^0z^0)^0)^0 \tag{1}$$

例 1 说明由等式(1)所定义的簇是完全正则半群簇的真子簇：

例 1　令 $S_\alpha=\{e_1,a_1,e_2,a_2,e_3,a_3,e_4,a_4\}$ 为含 2 个 $\mathscr{L}$-类和 2 个 $\mathscr{R}$-类的完全单半群，$S_\beta=\{f,g,h,k\}$ 为左零半群. 在 $S=S_\alpha\cup S_\beta$ 上定义 Cayley 表所示的乘法(如表 1 所示)：

表 1　在 $S=S_\alpha\cup S_\beta$ 上的乘法

	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	f	g	h	k
e_1	e_1	a_1	e_2	a_2	e_1	a_1	a_2	e_2	g	g	h	h
a_1	a_1	e_1	a_2	e_2	a_1	e_1	e_2	a_2	h	h	g	g
e_2	e_1	a_1	e_2	a_2	a_1	e_1	e_2	a_2	h	g	h	g
a_2	a_1	e_1	a_2	e_2	e_1	a_1	a_2	e_2	g	h	g	h
e_3	e_3	a_3	a_4	e_4	e_3	a_3	e_4	a_4	f	f	k	k
a_3	a_3	e_3	e_4	a_4	a_3	e_3	a_4	e_4	k	k	f	f

① 收稿日期：2014-01-07
基金项目：国家自然科学基金青年基金项目资助(11101336)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(XDJK2013B012).
作者简介：王正攀(1977-)，男，甘肃镇原人，副教授，主要从事半群代数理论的研究.

续表 1

	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	f	g	h	k
e_4	a_3	e_3	e_4	a_4	e_3	a_3	e_4	a_4	f	k	f	k
a_4	e_3	a_3	a_4	e_4	a_3	e_3	a_4	e_4	k	f	k	f
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g
h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k

可以验证，S 是半群，因而是完全正则半群，且

$$((e_1e_4)^0f)^0=h\neq g=(e_1(e_4f)^0)^0$$

追加如下两个等式：

$$x(yz)^0x(yz)^0=x(yz^0)^0x(yz)^0 \qquad (xy)^0z(xy)^0z=(xy)^0z(x^0y)^0z \tag{2}$$

定义由(1)式所给出的完全正则半群子簇的一个子簇，记其为 $\mathscr{X}$(即 $\mathscr{X}$ 为(1)式与(2)式中的等式共同定义的完全正则半群子簇)．可以借助计算机程序(例如 C++ 程序，下同)验证，例 1 所示的半群 S 满足(2)式．例 2 进一步说明(1)式和(2)式中的 3 个等式是相互独立的．

例 2 令群 $S_\alpha=\{e,a\}$，左零半群 $S_\beta=\{f,g\}$，以及含 5 个 $\mathscr{L}$-类和 2 个 $\mathscr{R}$-类的完全单半群

$$S_\gamma=\{e_1,a_1,e_2,a_2,e_3,a_3,e_4,a_4,e_5,a_5,f_1,b_1,f_2,b_2,f_3,b_3,f_4,b_4,f_5,b_5\}$$

在 $S=S_\alpha\cup S_\beta\cup S_\gamma$ 上定义 Cayley 表所示的乘法(如表 2 所示)：

表 2 在 $S=S_\alpha\cup S_\beta\cup S_\gamma$ 上的乘法

	e	a	f	g	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
e	e	a	f	g	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
a	a	e	g	f	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
f	f	f	f	f	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
g	g	g	g	g	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
e_1	e_4	a_5	a_3	e_2	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	e_1	a_1	a_2	e_2	a_3	e_3	e_4	a_4	e_5	a_5
a_1	a_4	e_5	e_3	a_2	a_1	e_1	a_2	e_2	a_3	e_3	a_4	e_4	a_5	e_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
e_2	e_2	e_2	e_2	e_2	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_1	e_1	a_2	e_2	a_3	e_3	a_4	e_4	a_5	e_5	e_1	a_1	a_2	e_2	a_3	e_3	e_4	a_4	e_5	a_5
e_3	e_3	e_3	e_3	e_3	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_1	e_1	a_2	e_2	a_3	e_3	a_4	e_4	a_5	e_5	e_1	a_1	a_2	e_2	a_3	e_3	e_4	a_4	e_5	a_5
e_4	e_4	a_5	a_3	e_2	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	e_1	a_1	a_2	e_2	a_3	e_3	e_4	a_4	e_5	a_5
a_4	a_4	e_5	e_3	a_2	a_1	e_1	a_2	e_2	a_3	e_3	a_4	e_4	a_5	e_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
e_5	e_5	a_4	a_2	e_3	e_1	a_1	e_2	a_2	e_3	a_3	e_4	a_4	e_5	a_5	e_1	a_1	a_2	e_2	a_3	e_3	e_4	a_4	e_5	a_5
a_5	a_5	e_4	e_2	a_3	a_1	e_1	a_2	e_2	a_3	e_3	a_4	e_4	a_5	e_5	a_1	e_1	e_2	a_2	e_3	a_3	a_4	e_4	a_5	e_5
f_1	f_4	b_5	f_3	b_2	f_1	b_1	b_2	f_2	b_3	f_3	f_4	b_4	f_5	b_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
b_1	b_4	f_5	b_3	f_2	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	b_1	f_1	b_2	f_2	b_3	f_3	b_4	f_4	b_5	f_5
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	f_1	b_1	b_2	f_2	b_3	f_3	f_4	b_4	f_5	b_5	b_1	f_1	b_2	f_2	b_3	f_3	b_4	f_4	b_5	f_5
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
b_3	b_3	b_3	b_3	b_3	f_1	b_1	b_2	f_2	b_3	f_3	f_4	b_4	f_5	b_5	b_1	f_1	b_2	f_2	b_3	f_3	b_4	f_4	b_5	f_5
f_4	f_4	b_5	f_3	b_2	f_1	b_1	b_2	f_2	b_3	f_3	f_4	b_4	f_5	b_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
b_4	b_4	f_5	b_3	f_2	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	b_1	f_1	b_2	f_2	b_3	f_3	b_4	f_4	b_5	f_5
f_5	f_5	b_4	f_2	b_3	f_1	b_1	b_2	f_2	b_3	f_3	f_4	b_4	f_5	b_5	f_1	b_1	f_2	b_2	f_3	b_3	f_4	b_4	f_5	b_5
b_5	b_5	f_4	b_2	f_3	b_1	f_1	f_2	b_2	f_3	b_3	b_4	f_4	b_5	f_5	b_1	f_1	b_2	f_2	b_3	f_3	b_4	f_4	b_5	f_5

可以借助计算机程序验证 S 是半群，因而是完全正则半群. S 满足(1) 式和(2) 式中的等式 $x(yz)^0x(yz)^0=x(yz^0)^0x(yz)^0$. 然而 $(af)^0e_1(af)^0e_1=e_1\neq a_1=(af)^0e_1(a^0f)^0e_1$，即 S 不满足(2) 式中的另一等式. 取 S 的左右对偶半群 $T=T_\alpha\cup T_\beta\cup T_\gamma$，其中 $T_\alpha=\{e,a\}$，$T_\beta=\{f,g\}$ 为右零半群，且

$$T_\gamma=\{e_1,a_1,e_2,a_2,e_3,a_3,e_4,a_4,e_5,a_5,f_1,b_1,f_2,b_2,f_3,b_3,f_4,b_4,f_5,b_5\}$$

为含 2 个 $\mathscr{L}$-类和 5 个 $\mathscr{R}$-类的完全单半群. 则 T 满足等式(1) 和 $(xy)^0z(xy)^0z=(xy)^0z(x^0y)^0z$，但不满足

$$x(yz)^0x(yz)^0=x(yz^0)^0x(yz)^0$$

引理 1　$\mathscr{O}\vee\mathscr{BG}\subseteq\mathscr{Z}$.

证　据文献[2] 中引理 Ⅱ.8.1，易知 $\mathscr{BG}\subseteq\mathscr{Z}$. 假设 $S\in\mathscr{O}$，对任意 $a,b,c\in S$，注意到 $ab\mathscr{R}ab^0$，由文献[2] 中引理 Ⅱ.5.2，有

$$c(ab)^0c(ab)^0=c(ab)^0(ab^0)^0c(ab)^0=c(ab^0)^0c(ab)^0$$

类似地，$(ab)^0c(ab)^0c=(ab)^0c(a^0b)^0c$. 于是 $S\in\mathscr{Z}$，即 $\mathscr{O}\subseteq\mathscr{Z}$. 因此 $\mathscr{O}\vee\mathscr{BG}\subseteq\mathscr{Z}$.

引理 2　如果 S 满足等式(2)，则对任意 $a,b,c,d\in S$，有

(ⅰ) $c(ab)^0\in E(S)$ 当且仅当 $c(ab^0)^0\in E(S)$；

(ⅱ) $(ab)^0c\in E(S)$ 当且仅当 $(a^0b)^0c\in E(S)$；

(ⅲ) $c(ab)^0d\in E(S)$ 当且仅当 $c(a^0b^0)^0d\in E(S)$.

证　(ⅰ) 设 $c(ab)^0\in E(S)$，则由 $ab\mathscr{R}ab^0$，$c(ab)^0\in E(S)$ 以及(2) 式中第一个等式，有

$$c(ab^0)^0=c(ab)^0(ab^0)^0=c(ab)^0c(ab)^0(ab^0)^0=c(ab^0)^0c(ab)^0(ab^0)^0=c(ab^0)^0c(ab^0)^0$$

也即 $c(ab^0)^0\in E(S)$.

反过来，设 $c(ab^0)^0\in E(S)$，则有

$$c(ab)^0c(ab)^0=c(ab^0)^0(ab)^0c(ab)^0c(ab^0)^0c(ab^0)^0(ab)^0c(ab)^0c(ab^0)^0c(ab)^0c(ab)^0c(ab)^0c(ab)^0c(ab)^0$$

因此 $c(ab)^0\in E(S)$.

(ⅱ) 类似 (ⅰ) 的证明可证.

(ⅲ) 据文献[2] 中引理 Ⅱ.2.2 以及 (ⅰ),(ⅱ) 可证.

引理 3　对任意 $S\in\mathscr{Z}$，在 S 上定义二元关系 ρ 如下：

$$\rho=\{(c(ab)^0d,\ c(a^0b^0)^0d)\in S\times S\mid a,b,c,d\in S\}$$

则 ρ^* 是幂等元纯同余，且 $S/\rho^*\in\mathscr{BG}$.

证　据引理 2(ⅲ)，ρ 是幂等元纯的，不难看出 ρ 是相容的，且 $\varepsilon\subseteq\rho$. 所以 $\rho^*=(\rho\cup\rho^{-1})^t$ 是幂等元纯的，其中 $(\rho\cup\rho^{-1})^t$ 是 $\rho\cup\rho^{-1}$ 的传递闭包(见文献[2] 的 Ⅰ.3 节). 显然，$(ab)^0\rho(a^0b^0)^0$ 对任意 $a,b\in S$ 成立. 因此，据文献[2] 中引理 Ⅱ.8.1 知 $S/\rho^*\in\mathscr{BG}$.

引理 4　对任意 $S\in\mathscr{Z}$，在 S 上定义二元关系 σ 如下：

$$\sigma=\{(ca^0b^0d,\ c(a^0b^0)^0d)\in S\times S\mid a,b,c,d\in S\}$$

则 σ^* 是幂等元分离同余，且 $S/\sigma^*\in\mathscr{O}$.

证　任取 $a,b,c,d\in S$，由文献[2] 中引理 Ⅲ.1.1 和(1) 式，有

$$\begin{aligned}(ca^0b^0d)^0=&((ca^0b^0d)(ca^0b^0d))^0=((ca^0(b^0d^0)^0)((c^0a^0)^0b^0d))^0=\\&(c(a^0(b^0d^0)^0)^0((c^0a^0)^0b^0)^0d)^0=(c((a^0b^0)^0d^0)^0(c^0(a^0b^0)^0)^0d)^0=\\&((c(a^0b^0)^0d)(c(a^0b^0)^0d))^0=(c(a^0b^0)^0d)^0\end{aligned}$$

即 $(ca^0b^0d,\ c(a^0b^0)^0d)\in\mathscr{H}$，从而有 $\sigma\subseteq\mathscr{H}$. 不难看出，$\sigma$ 是相容的，且 $\varepsilon\subseteq\sigma$. 所以 $\sigma^*=(\sigma\cup\sigma^{-1})^t$. 注意到 $\mathscr{H}$ 是一等价关系，有 $\sigma^*\subseteq\mathscr{H}$. 由文献[2] 中引理 Ⅱ.3.3 知，$\sigma$ 是幂等元分离的. 显然，$a^0b^0\sigma(a^0b^0)^0$. 据文献[2] 中引理 Ⅱ.5.3，有 $S/\sigma^*\in\mathscr{O}$.

最后给出我们的主要结论：

定理 1　$\mathscr{Z}=\mathscr{O}\vee\mathscr{BG}$.

证 任取$S \in \mathscr{Z}$，假设ρ和σ是S上如引理3和4所定义的二元关系．由文献[2]中引理Ⅱ.3.3知，$\rho^{*} \cap \sigma^{*} = \varepsilon$．再由文献[2]中引理Ⅰ.5.7知，$S$是$S/\sigma^{*}$和$S/\rho^{*}$的次直积．所以$S \in \mathscr{O} \vee \mathscr{BG}$，即$\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{O} \vee \mathscr{BG}$．结合引理1，我们证得$\mathscr{Z} = \mathscr{O} \vee \mathscr{BG}$．

参考文献：

[1] 李崇娟，王正攀．密码群并半群上的最小Abel群并半群同余[J]．西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：9－10．

[2] PETRICH M，REILLY N R. Completely Regular Semigroups[M]. New York：John Wiley and Sons，1999：1－122.

[3] 王正攀，潘慧兰，冷　静．正则密码群并半群的两个等价刻画[J]．西南大学学报：自然科学版，2013，35(10)：60－62．

The Join of Orthogroup Variety and Cryptogroup Variety

WANG Zheng-pan， PAN Hui-lan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A subvariety of the variety of completely regular semigroups is defined by the identity $((x^0y^0)^0z^0)^0=(x^0(y^0z^0)^0)^0$. An example is provided to illustrate that the subvariety is proper. Two additional identities，$x(yz)^0x(yz)^0=(yz^0)^0x(yz)^0$ and $(xy)^0z(xy)^0z=(xy)^0z(x^0y)^0z$，are used to define a subvariety of the above subvariety. Examples are given to show that the above three identities are independent on each other. It is proved that the proper subvariety defined by the three identities is the join of the orthogroup variety and the cryptogroup variety.

Key words：completely regular semigroup；orthogroup；cryptogroup；variety；congruence

责任编辑　廖　坤