第 36 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014 年 4 月
Vol. 36　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2014

文章编号：1673-9868(2014)4-0034-05

7 次交错群 A_7 的新刻画[①]

郭继东[1]，　任永才[2]，　张志让[3]

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 83500；
2. 四川大学 数学学院，成都 610064；3. 成都信息工程学院 数学学院，成都 610225

摘要：给出 7 次交错群 A_7 的新刻画，证明了：如果 G 是一个非可解群且 G 的同阶元素的个数组成的集合是

$$\{1, 105, 350, 630, 504, 210, 720\}$$

则 $G \cong A_7$.

关　键　词：有限群，交错群，元素的阶，同阶元素的个数

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**

本文主要给出 7 次交错群 A_7 的新刻画. 本文中的群都是指有限群，C_n 表示 n 阶循环群，字母 G 总是代表一个群. $\mathrm{Syl}_p(G)$ 表示 G 的全体 Sylow p-子群组成的集合. 对于正整数 n，我们用 $\pi(n)$ 表示 n 的全体素因子组成的集合. $|G|$ 表示 G 的阶，$\pi(|G|)$ 简记为 $\pi(G)$，即 $\pi(G)$ 是 $|G|$ 的全体素因子组成的集合，用 $\pi_e(G)$ 表示 G 的元素的阶组成的集合，用 s_n 表示 G 中的 n 阶元的个数. 如果 $\pi_e(G)=\{n_1=1, n_2, \cdots, n_m\}$，我们定义 $T_e(G)=\{s_{n_1}=1, s_{n_2}, \cdots, s_{n_m}\}$，即 $T_e(G)$ 表示 G 中的同阶元素的个数组成的集合. 例如，对于 7 次交错群 A_7，我们有 $\pi_e(A_7)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$s_1=1$，$s_2=105$，$s_3=350$，$s_4=630$，$s_5=504$，$s_6=210$，$s_7=720$，所以 $T_e(A_7)=\{1, 105, 350, 630, 504, 210, 720\}$. 文中其它未说明的符号都是标准的.

引理 1[1]　设 p 是素数，n 是正整数，则 $\varphi(p^n)=p^{n-1}(p-1)$. 设 $m=p_1^{n_1}\cdots p_t^{n_t}$，其中 p_i 是不同的素数，n_i 是正整数($i=1,2,\cdots,t$)，那么 $\varphi(m)=\varphi(p_1^{n_1})\cdots\varphi(p_t^{n_t})$. 此外，如果 $m>2$，则 $\varphi(m)$ 是偶数(φ 是 Euler 函数).

下述引理 2(i) 是众所周知的，由引理 1 和引理 2(i) 可得到引理 2(ii) 和引理 2(iii)：

引理 2　对于群 G，下述 3 个命题成立：

(i) $s_m=k\varphi(m)$，其中 k 是 G 的 m 阶循环子群的个数(一个 m 阶循环群中的 m 阶元(即生成元)的个数是 $\varphi(m)$)；

(ii) 如果 $m>2$，则 s_m 是偶数；

(iii) 若 s_m 是奇数，则 $m=2$，G 是偶数阶群.

下述引理 3(i) 是 Frobenius 的一个著名的结果(见文献[2])，而引理 3(ii) 是引理 3(i) 的直接推论：

引理 3[2]　对于群 G，下述两个命题成立：

(i) 设 m 是 $|G|$ 的因子，则 $m \mid |\{g\in G \mid g^m=1\}|$；

(ii) 如果 p 是 $|G|$ 的素因子，则 $p \mid (1+s_p)$.

---

① 收稿日期：2012-11-28
基金项目：新疆维吾尔自治区普通高等学校重点学科基金资助项目(2012ZDXK12).
作者简介：郭继东(1965-)，男，山东郓城人，教授，主要从事群论的研究.
通信作者：任永才，教授.

定义1 设 $T_e(G)=\{m_1=1, m_2, \cdots, m_t\}$，定义

$$T_e(G)+1=\{m_1+1, m_2+1, \cdots, m_t+1\}$$

$$\pi(T_e(G)+1)=\bigcup_{i=1}^{t}\pi(m_i+1)$$

下述引理4是引理3(ⅱ)的直接推论：

引理4 $\pi(G)\subseteq\pi(T_e(G)+1)$.

引理5[3] 设 G 是 p^n 阶初等Abel p-群(p 是素数)，则 $|\mathrm{Aut}(G)|=p^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}(p^i-1)$.

引理6 设 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2\,520$，则下述两个命题成立：

(ⅰ) 如果 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，则 $G\cong A_7$；

(ⅱ) $\pi_e(G)\neq\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 14\}$.

证 (ⅰ) 假设 G 不是单群，并令 N 是 G 的极小正规子群，则 N 要么是一个初等Abel p-群(p 是素数)，要么是若干个同构的非Abel单群的直积(见文献[3]定理8.10).

设 N 是初等Abel p-群. 据题设知 $p=2,3,5,7$. 由引理5知，如果 $p=7$ 或 $p=5$，则 $|N|=7$ 或 $|N|=5$，$|\mathrm{Aut}(N)|=2\cdot 3$ 或 $|\mathrm{Aut}(N)|=2^2$，于是 G 有35阶元，与题设矛盾. 如果 $p=3$，则要么 $N\cong C_3$，要么 $N\cong C_3\times C_3$，从而据引理5知 G 有15阶元，与题设矛盾. 如果 $p=2$，则 $N\cong C_2, C_2\times C_2, C_2\times C_2\times C_2$，据引理5，这3种情形都导致 G 有10阶元，与题设矛盾. 所以，N 不是初等Abel p-群.

设 N 是若干个同构的非Abel单群的直积. 由于最小阶的非Abel单群是60阶单群 A_5，而 $|G|=2\,520$，故 N 是非Abel单群.

令 $P\in\mathrm{Syl}_2(N)$，据题设，$|P|\leqslant 2^3$. 由于 N 是单群，故 P 不能是(8阶)四元数群(见文献[4]第12章的定理1.1下面的说明). 因为 2^3 阶群要么是8阶二面体群，要么是8阶四元数群，要么是8阶Abel群(见文献[5]定理2, p.376)，而阶不大于4的群是Abel群，所以 P 要么是8阶二面体群，要么是Abel群. 此外，据题设和Burnside (p, q)-定理(见文献[6]定理3.10)知，G 的每个对合的中心化子是可解的. 于是，由关于单群的两个分类定理(见文献[4])，下述之一成立：

(a) $N\cong\mathrm{PSL}(2, q)$，$q>3$，q 是奇素数的幂；

(b) $N\cong\mathrm{PSL}(2, 2^n)$，$n\geqslant 2$；

(c) $N\cong A_7$.

由于 $|N|<|G|=2\,520=|A_7|$，则情形(c)不能发生. 由文献[2]知

$$|\mathrm{PSL}(2, q)|=\frac{(q-1)q(q+1)}{2} \qquad |\mathrm{PSL}(2, 2^n)|=(2^n-1)2^n(2^n+1)$$

因为 $\mathrm{PSL}(2, 2^2)\cong A_5\cong\mathrm{PSL}(2, 5)$，据题设，$N$ 显然与下述群之一同构：$\mathrm{PSL}(2, q)$ $(q=2^3,5,7,3^2)$. 显然有 $C_G(N)=\{1\}$，从而 $G\leqslant\mathrm{Aut}(N)$. 于是 G 可视为下述群之一的子群：$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, q))$，从而 $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=|G|$ 是 $|\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, q))|$ 的因子，其中 $q=2^3,5,7,3^2$. 但是，据文献[7]我们有

$$|\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, 2^3))|=2^3\cdot 3^3\cdot 7 \qquad |\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, 5))|=2^3\cdot 3\cdot 5$$

$$|\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, 7))|=2^4\cdot 3\cdot 7 \qquad |\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, 3^2))|=2^5\cdot 3^2\cdot 5$$

所以 $|G|$ 不能是 $|\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2, q))|$ 的因子，其中 $q=2^3,5,7,3^2$，矛盾.

总上所述，G 是(非Abel)单群，从而 $G\cong A_7$.

(ⅱ) 在(ⅰ)的证明中用到的关键条件是“每个对合的中心化子是可解的”，“$\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 14\}$”也满足这个条件. 所以，如果 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 14\}$，则 $G\cong A_7$，然而 $\pi_e(A_7)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，矛盾. 所以，$\pi_e(G)\neq\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 14\}$.

定理1 如果 G 是非可解群且 $T_e(G)=\{1, 105, 350, 630, 504, 210, 720\}$，则 $G\cong A_7$.

证 为便于对照查看，我们列出两个表格. 表1第一行中的数是 $T_e(G)$ 中的数，而第二行中的各个乘积是它正上方的数的素因子分解式. 表2第一行中的数是 $T_e(G)+1$ 中的数，而第二行中的各个乘积是它正上方的数的素因子分解式.

表 1　$T_e(G)$ 中的数及其素因子分解式

1	105	350	630	504	210	720
1	$3\cdot5\cdot7$	$2\cdot5^2\cdot7$	$2\cdot3^2\cdot5\cdot7$	$2^3\cdot3^2\cdot7$	$2\cdot3\cdot5\cdot7$	$2^4\cdot3^2\cdot5$

表 2　$T_e(G)+1$ 中的数及其素因子分解式

2	106	351	631	505	211	721
2	$2\cdot53$	$3^3\cdot13$	631	$5\cdot101$	211	$7\cdot103$

由表 2 得到

$$\pi(T_e(G)+1)=\{2,3,5,7,13,53,101,211,103,631\} \tag{1}$$

下面我们分若干步骤完成定理 1 的证明.

步骤 1　$|G|\geqslant 2\ 520$(显然).

步骤 2　下述事实成立：(a) $2\in\pi(G)$ 且 $s_2=105$；(b) 如果 $3\in\pi(G)$，则 $s_3=350$；(c) 如果 $5\in\pi(G)$，则 $s_5=504$；(d) 如果 $7\in\pi(G)$，则 $s_7=720$.

据引理 2(ⅲ) 知(a) 成立. 据引理 3(ⅱ) 和表 2 知(b)－(d) 成立.

步骤 3　下述事实成立：(a) $13\notin\pi(G)$；(b) $53\notin\pi(G)$；(c) $101\notin\pi(G)$；(d) $211\notin\pi(G)$；(e) $103\notin\pi(G)$；(f) $631\notin\pi(G)$.

设 $13\in\pi(G)$，那么，据引理 3(ⅱ) 和表 2 得 $s_{13}=350$，从而据引理 2(ⅰ) 有 $\varphi(13)=12\mid350$，但这不可能，故 $13\notin\pi(G)$，即(a) 成立. 如果 $53\in\pi(G)$，则据引理 3(ⅱ) 和表 2 可知 $s_{53}=105$，从而据引理 2(ⅲ) 有 $53=2$，矛盾，故 $53\notin\pi(G)$，即(b) 成立. 同理，(c) 和(e) 成立.

设 $211\in\pi(G)$，则据引理 3(ⅱ) 和表 2 得 $s_{211}=210$. 假设 $2\cdot211\in\pi_e(G)$. 由于 $\varphi(2\cdot211)=210$，据引理 2(ⅰ) 和表 1 可知 $s_{2\cdot211}=210$. 于是，据引理 3(ⅰ) 有

$$2\cdot211\mid|\{g\in G\mid g^{2\cdot211}=1\}|=1+s_2+s_{211}+s_{2\cdot2\ 111}=1+105+210+210=526$$

即 $422\mid526$，但这不可能，所以 $2\cdot221\notin\pi_e(G)$. 这说明 G 的 211 阶子群的每个非单位元共轭无不动点地作用于 G 的全体 2 阶元组成的集合，从而 $105(=s_2)$ 是 211 的倍数，矛盾. 所以 $211\notin\pi(G)$，即(d) 成立.

设 $631\in\pi(G)$，则据引理 3(ⅱ) 和表 2 得 $s_{631}=630$. 假设 $2\cdot631\in\pi_e(G)$. 由于 $\varphi(2\cdot631)=630$，据引理 2(ⅰ) 和表 1 可知 $s_{2\cdot631}=630$. 于是据引理 3(ⅰ) 有

$$2\cdot631\mid|\{g\in G\mid g^{2\cdot631}=1\}|=1+s_2+s_{631}+s_{2\cdot631}=1+105+630+630=1\ 366$$

即 $2\cdot631\mid1\ 366$，但这不可能. 所以 $2\cdot631\notin\pi_e(G)$. 这说明 G 的 631 阶子群的非单位元共轭无不动点地作用于 G 的全体 2 阶元组成的集合，从而 $105(=s_2)$ 是 631 的倍数，矛盾. 所以 $631\notin\pi(G)$，即(f) 成立.

步骤 4　$\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7\}$.

由引理 4 和步骤 3 以及(1) 式得到.

步骤 5　设 $|G|=3^m\cdot r$，其中 m 和 r 是正整数，且 $(3,r)=1$. 那么 $3^4\notin\pi_e(G)$，并且如果 $3^3\notin\pi_e(G)$，则 $3^2\notin\pi_e(G)$.

如果 $3^t\in\pi_e(G)$，那么由 $\varphi(3^t)=2\cdot3^{t-1}$，引理 2(ⅰ) 和表 1 可知 $(t-1)\leqslant2$. 所以 $3^4\notin\pi_e(G)$.

设 $3^3\notin\pi_e(G)$ 但 $3^2\in\pi_e(G)$. 由于 $\varphi(3^2)=2\cdot3$，据引理 2(ⅰ) 和表 1 可知 $s_{3^2}\in\{630,504,210,720\}$. 据步骤 2 和引理 3(ⅰ) 有

$$3^m\mid|\{g\in G\mid g^{3^m}=1\}|=1+s_3+s_{3^2}\qquad 3^m\mid(351+s_{3^2})$$

逐个代入 s_{3^2} 可能取的值，易算出 $m=2$. 例如设 $s_{3^2}=630$，那么 $3^m\mid(351+s_{3^2})=351+630$，$3^m\mid981$，这表明 $m=2$. 于是，G 的 Sylow 3-子群是 3^2 阶循环群. 由于 $s_{3^2}\in\{630,504,210,720\}$ 及 $\varphi(3^2)=6$，据引理 2(ⅰ) 我们有 $|\mathrm{Syl}_3(G)|\in\{105,84,35,120\}$，与第三 Sylow 定理矛盾. 从而，如果 $3^3\notin\pi_e(G)$，则 $3^2\notin\pi_e(G)$.

步骤 6　设 $|G|=5^r\cdot f$，其中 r 和 f 是正整数且 $(5,f)=1$. 则

$$r=1 \qquad \pi(G)=\{2,3,5,7\} \qquad |\mathrm{Syl}_5(G)|=126$$

如果 $5^t \in \pi_e(G)$，由于 $\varphi(5^t)=2^2 \cdot 5^{t-1}$，据引理 2(i) 和表 1 可知 $(t-1)\leqslant 1$，$t\leqslant 2$．所以 $5^3 \notin \pi_e(G)$．

假设 $5^2 \in \pi_e(G)$，则 $s_{5^2}=720$．由步骤 2 知 $s_5=504$，于是由 $5^3 \notin \pi_e(G)$ 和引理 3(i) 有

$$5^r \mid |\{g\in G \mid g^{5^r}=1\}|=1+s_5+s_{5^2} \qquad 5^r \mid (1+504+720) \qquad 5^r \mid 1\,225$$

这意味着 $r=2$．所以 G 的 Sylow 5-子群是 5^2 阶循环群．从而，由于 $s_{5^2}=720$ 及 $\varphi(5^2)=20$，据引理 2(i) 我们有 $|\mathrm{Syl}_5(G)|=36$．由于 $s_5=504$ 及 $\varphi(5)=4$，据引理 2(i) 知 G 有 126 个 5 阶子群．由于 G 的每个 Sylow 5-子群(5^2 阶循环群)恰含一个 5 阶子群，而 G 的每个 5 阶子群含于 G 的一个 Sylow 5-子群，我们有 $126\leqslant 36$，矛盾．所以 $5^2 \notin \pi_e(G)$．

总上所述，G 的 5-元都是 5 阶的．于是，据引理 3(i) 我们有 $5^r \mid |\{g\in G \mid g^{5^r}=1\}|=1+s_5=1+504$，$5^r \mid 505$．这表明 $r=1$．于是，令 $P\in \mathrm{Syl}_5(G)$，我们有 $|P|=5$，从而 $|\mathrm{Syl}_5(G)|=126$．这意味着 $[G:N_G(P)]=126=2\cdot 3^2\cdot 7$．所以，我们有 $\{2,3,5,7\}\subseteq \pi(G)$，从而据步骤 4 得 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$．

步骤 7 设 $|G|=7^f\cdot h$，其中 f 和 h 是正整数且 $(7,h)=1$．则 $f=1$，$\pi(G)=\{2,3,5,7\}$．

如果 $7^t\in\pi_e(G)$，由于 $\varphi(7^t)=2\cdot 3\cdot 7^{t-1}$，并据引理 2(i) 和表 1 可知 $(t-1)\leqslant 1$．所以 $7^3\notin\pi_e(G)$．

假设 $7^2\in\pi_e(G)$，则 $s_{7^2}\in\{630,504,210\}$．由步骤 2 知 $s_7=720$，由 $7^3\notin\pi_e(G)$ 和引理 3(i) 有

$$7^f \mid |\{g\in G \mid g^{7^f}=1\}|=1+s_7+s_{7^2} \qquad 7^f \mid (1+720+s_{7^2})$$

逐个代入 s_{7^2} 可能取的值易算出 $f=2$ 且 $s_{7^2}\in\{504,210\}$．从而 G 的 Sylow 7-子群是 7^2 阶循环群，并且由于 $\varphi(7^2)=42$，据引理 2(i) 知 G 的 Sylow 7-子群(即 7^2 阶循环子群)的个数是 12 或 5，与第三 Sylow 定理矛盾．所以 $7^2\notin\pi_e(G)$．

总上所述，G 的 7-元都是 7 阶的．于是据引理 3(i) 得 $7^f \mid (1+s_7)=1+720=721$．由此我们有 $f=1$．这说明 G 的 Sylow 7-子群是 7 阶群．于是，由于 $s_7=720$ 及 $\varphi(7)=6$，据引理 2(i) 知 $|\mathrm{Syl}_7(G)|=120=2^3\cdot 3\cdot 5$．这意味着 $2^3\cdot 3\cdot 5$ 是 $|G|$ 的因子．所以 $\{2,3,5,7\}\subseteq\pi(G)$，从而据步骤 4 得 $\pi(G)=\{2,3,5,7\}$．

步骤 8 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ 且 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$．

据题设，G 是非可解的，从而据 Burnside (p,q)-定理我们有 $|\pi(G)|\geqslant 3$．于是，据步骤 2(a)、步骤 4、步骤 6、步骤 7 知 $|G|=2^n\cdot 3^m\cdot 5\cdot 7$．

假设 $7\cdot 5\in\pi_e(G)$．由于 $\varphi(7\cdot 5)=2^3\cdot 3$，据引理 2(i) 和表 1 可知 $s_{7\cdot 5}=504,720$．于是据引理 3(i) 有 $35=7\cdot 5 \mid (1+s_5+s_7+s_{7\cdot 5})$，$35 \mid (1+504+720+s_{7\cdot 5})$，$35 \mid 1\,729$ 或 $35 \mid 1\,945$，但这都不可能．所以 $7\cdot 5\notin\pi_e(G)$．

假设 $2\cdot 5\in\pi_e(G)$．由于 $\varphi(2\cdot 5)=2^2$，据引理 2(i) 和表 1 可知 $s_{2\cdot 5}=504,720$，于是，据引理 3(i) 有 $2\cdot 5 \mid (1+s_2+s_5+s_{2\cdot 5})$，$10 \mid (1+105+504+s_{2\cdot 5})=610+s_{2\cdot 5}$，$10 \mid (610+504)$ 或 $10 \mid (610+720)$．所以 $s_{2\cdot 5}=720$．由于 $7\cdot 5\notin\pi_e(G)$，$2\cdot 5\cdot 7\notin\pi_e(G)$，这表明 G 的 7 阶子群的每个非单位元共轭无不动点地作用于 G 的全体 $2\cdot 5$ 阶元组成的集合，从而 $7 \mid s_{2\cdot 5}$，即 $7 \mid 720$，但这不可能，所以 $2\cdot 5\notin\pi_e(G)$．

假设 $3\cdot 5\in\pi_e(G)$．由于 $\varphi(3\cdot 5)=2^3$，据引理 2(i) 和表 1 可知 $s_{3\cdot 5}=504,720$．于是，据引理 3(i) 有 $3\cdot 5 \mid (1+s_3+s_5+s_{3\cdot 5})$，$3\cdot 5 \mid (1+350+504+s_{3\cdot 5})$，$3\cdot 5 \mid 1\,359$ 或 $3\cdot 5 \mid 1\,575$．所以 $s_{3\cdot 5}=720$．由于 $7\cdot 5\notin\pi_e(G)$，$3\cdot 5\cdot 7\notin\pi_e(G)$，这表明 G 的 7 阶子群的每个非单位元共轭无不动点地作用于 G 的全体 $3\cdot 5$ 阶元组成的集合，从而 $7 \mid s_{3\cdot 5}$，即 $7 \mid 720$，但这不可能，所以，$3\cdot 5\notin\pi_e(G)$．

综上所述，我们有 $t\cdot 5\notin\pi_e(G)$，其中 $t=2,3,7$．

令 $P\in\mathrm{Syl}_5(G)$．由于 $|\mathrm{Syl}_5(G)|=126=2\cdot 3^2\cdot 7$(见步骤 6)，我们有 $|N_G(P)|=2^{n-1}\cdot 3^{m-2}\cdot 5$．于是，由于 $|\mathrm{Aut}(P)|=\varphi(5)=2^2$ 及 $t\cdot 5\notin\pi_e(G)$，其中 $t=2,3$，我们得到 $n-1\leqslant 2$，$m-2=0$．于是 $|G|=2^n\cdot 3^m\cdot 5\cdot 7\leqslant 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2\,520$．由于 $|G|\geqslant 2\,520$(见步骤 1)，我们得到 $n=3$，$m=2$，$|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$．

假设 $4\notin\pi_e(G)$．据引理 3(i) 得 $2^3 \mid |\{g\in G \mid g^{2^3}=1\}|=1+s_2=1+105=106$，即 $2^3 \mid 106$，但这不

可能. 所以 $4\in\pi_e(G)$. 由

$$|G|=2\ 520$$

$$|G|-(s_1+s_2+s_3+s_5+s_7+s_4)=2\ 520-(1+105+350+504+720+s_4)=840-s_4$$

据题设显然有 $s_4=630,210$，且存在 $x\in\pi_e(G)$ 使得 $x\notin\{1,2,3,5,7,2^2\}$ 且 $s_x=840-s_4$. 因为 $2\cdot 5\notin\pi_e(G)$，$3\cdot 5\notin\pi_e(G)$，$7\cdot 5\notin\pi_e(G)$，所以 $x=2^3,3^2,3\cdot 7,2\cdot 7,6$. 如果 $x=2^3$，则 $2^3\mid(1+s_2+s_{2^2}+s_{2^3})=1+105+840=946$，即 $8\mid 946$，但这不可能. 所以 $x\neq 2^3$. 由于 $3^3\notin\pi_e(G)$，故 $3^2\notin\pi_e(G)$（见步骤 5），从而 $x\neq 3^2$. 设 $x=3\cdot 7$，则

$$s_{3\cdot 7}=504,720\qquad 21\mid(1+s_3+s_7+s_{3\cdot 7})=1+350+720+s_{3\cdot 7}=1\ 071+s_{3\cdot 7}$$

即 $s_{3\cdot 7}=504$，与 $s_{3\cdot 7}=s_x=630,210$ 矛盾. 所以 $3\cdot 7\notin\pi_e(G)$. 于是 $x=6$ 或 $x=14$. 从而 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 或 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,7,14\}$. 但据引理 6 知后一情形不能发生，所以 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

我们已经证明了：$|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2\ 520$ 且 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 从而据引理 6 我们得到 $G\cong A_7$.

参考文献：

[1] LANG S. ALGEBRA [M]. California：Addison Publishing Company，1984.
[2] HUPPET B. Endlich Gruppen I [M]. New York：Springer-Verlag，1967.
[3] ROSE J S. A Course on Group Theory [M]. Campridge：Campridge University Press，1978.
[4] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York：Harperand Row，1968.
[5] 张远达. 有限群的构造：上册 [M]. 北京：科学出版社，1982.
[6] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York：Academic Press，1976.
[7] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

A New Characterization of the Alternating Group A_7 of Degree 7

GUO Ji-dong[1]， REN Yong-cai[2]， ZHANG Zhi-rang[3]

1. College of Mathematics and Statistics，Yili Normal University，Yining Xinjiang 83500，China；
2. School of Mathematics，Sichuan University，Chengdu 610064，China；
3. School of Mathematics，Chengdu University of Information Technology，Chengdu 610225，China

Abstract：In this paper，we give a new characterization of the alternating group A_7 of degree 7. The main result is the following theorem：If G is a non-solvable finite group and the set，which consists of the number of the same order elements in G，is

$$\{1,105,350,630,504,210,720\}$$

then $G\cong A_7$.

Key words：finite group；alternating group；the order of an element；the number of same order elements

责任编辑　廖　坤