第 38 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2013 年 12 月
Vol. 38　No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec. 2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0199-04

关于高等代数中线性变换的两点思考[①]

冯爱芳，　刘祖华

昆明学院 数学系，昆明 650214

摘要：以例题的形式，从有限维线性空间上的线性变换以及线性变换的线性性质两个方面对线性变换进行了探讨．列举了有限维和无限维线性空间中线性变换的不同性质，指出在正交变换和对称变换定义中，变换的线性性质能够由某些条件导出．

关　键　词：线性变换；可逆变换；正交变换；对称变换

中图分类号：G420；O151.2　　**文献标志码**：A

高等代数是本科数学类专业的必修课，对学生完成其他专业课程的学习具有基础性的作用，尤其是在近世代数(亦称抽象代数)和群论的学习中有着重要的作用(参见文献[1-3])．线性变换作为高等代数课程中的核心部分，其理论有着丰富的内容．下面笔者将从两个不同的方面，以例题的形式，对线性变换的性质进行探讨．

1　有限维线性空间上的线性变换

一般来说，高等代数中的理论多是在有限维线性空间中展开的．有限维线性空间上的线性变换理论是高等代数的重要组成部分，而且得到了充分的应用．但应注意到，很多有关有限维线性空间上的线性变换的事实在无限维空间上未必成立．

就映射来讲，单射未必是满射，满射也未必是单射．因此，一个映射 f 是双射当且仅当 f 既是单射又是满射．而有限维线性空间上的线性变换作为一种特殊的映射却有下面的事实：令 V 为 n 维线性空间，$\sigma \in L(V)$．则 σ 是单射当且仅当 σ 是满射．

也就是说，对于有限维线性空间上的线性变换，只要是单射(满射)就可以保证它为双射．然而这一性质在无限维线性空间上却未必成立．

例 1　令 $V=\mathbf{P}[x]$．在 V 上定义两个线性变换 σ,τ 分别为：

$$\sigma(f(x))=f'(x) \qquad \tau(f(x))=xf(x) \qquad \forall f(x)\in \mathbf{P}[x]$$

则容易证明 σ 是满射但非单射，而 τ 是单射但非满射．

例 2　令 $\sigma,\tau\in L(V)$．则当 V 为有限维时，$\sigma\tau-\tau\sigma\neq\varepsilon$，其中 ε 为恒等映射，而当 V 为无限维时却可能成立．

事实上，令 V 为数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一个基底，并且

$$\sigma(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{A}$$

① 收稿日期：2012-10-16
基金项目：云南省教育厅科学研究基金项目(2011C104)；昆明学院校级科研项目(XJL12009)．
作者简介：冯爱芳(1981-)，女，山东济宁人，讲师，主要从事无限群的研究．

$$\tau(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵. 若 $\sigma\tau - \tau\sigma = \varepsilon$，则 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵)，矛盾(参见文献[4]第 35 页的习题 19). 从而 $\sigma\tau - \tau\sigma \neq \varepsilon$.

再令 $V = \mathbf{P}[x]$，$\sigma, \tau \in L(V)$，且

$$\sigma(f(x)) = f'(x) \qquad \tau(f(x)) = xf(x) \qquad \forall f(x) \in \mathbf{P}[x]$$

则

$$(\sigma\tau - \tau\sigma)(f(x)) = \sigma(xf(x)) - \tau(f'(x)) = f(x) + xf'(x) - xf'(x) = f(x)$$

从而 $\sigma\tau - \tau\sigma = \varepsilon$.

例 3[4] 关于 n 维 Euclid 空间上的正交变换，我们有下面的事实：

令 V 为 n 维 Euclid 空间，$\sigma \in L(V)$. 则下列 5 款等价：

(1°) σ 为正交变换；

(2°) $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 为 V 的标准正交基底导出 $(\sigma\boldsymbol{e}_1, \sigma\boldsymbol{e}_2, \cdots, \sigma\boldsymbol{e}_n)$ 为 V 的标准正交基底；

(3°) σ 在任意标准正交基底下的矩阵为正交矩阵(正交矩阵即 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的实矩阵)；

(4°) σ 在某一标准正交基底下的矩阵为正交矩阵；

(5°) σ 保持向量的长度不变，即

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \qquad |\sigma\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}| \qquad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$$

由此我们知道，n 维 Euclid 空间 V 上的正交变换是可逆的. 因此 V 上所有正交变换的全体关于线性变换的合成运算作成一个群，而且正交变换保持内积，保持其任意两点间的距离，这个群可看作是 n 维 Euclid 空间 V，即线性空间加上正定内积 (x, y) 这个代数结构的对称群[5]. 而某些无限维 Euclid 空间上的所有正交变换全体关于线性变换的合成运算仅作成一个半群(合成运算满足封闭性和结合性). 事实上，某些无限维 Euclid 空间上的正交变换未必可逆，例如：

令 $V = \mathbb{R}[x]$，在 V 上定义 $(\,,\,)$ 为

$$(f(x), g(x)) = a_n b_n + \cdots + a_1 b_1 + a_0 b_0 \qquad \forall f(x), g(x) \in V$$

其中

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R} \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

容易验证 $(\,,\,)$ 作成 V 上的一个内积，从而实线性空间 V 连同其内积 $(\,,\,)$ 构成的代数系统为一无限维的 Euclid 空间. 令

$$\tau(f(x)) = xf(x) \qquad \forall f(x) \in \mathbf{P}[x]$$

则容易验证

$$(\tau f(x), \tau g(x)) = (f(x), g(x)) \qquad \forall f(x), g(x) \in \mathbf{P}[x]$$

从而 τ 为 V 上的一个正交变换，而显然 τ 不是满射，当然不可逆.

2 线性变换的线性性质

线性变换的很多性质都是基于它具有线性性这一好的性质，但其中也有些性质并不以线性条件为前提，而且本身就蕴含了线性条件. 现以 Euclid 空间中的两类特殊线性变换 —— 正交变换和对称变换为例说明.

例 4[4] 很多教科书上是这样来定义正交变换的：

Euclid 空间 V 上的线性变换 σ 称为正交的，如果它保持向量的内积不变，即

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

实际上，不必事先假设变换 σ 是线性的，因为变换 σ 一旦满足

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

则计算可知，对任意 $k, l \in \mathbb{R}$，有

$$(\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k(\sigma\boldsymbol{\alpha})-l(\sigma\boldsymbol{\beta}), \sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k(\sigma\boldsymbol{\alpha})-l(\sigma\boldsymbol{\beta}))=\mathbf{0}$$

所以 σ 必为线性的.

注 1　在直观几何中，正交变换就是保持向量距离不变的变换，而且例 3 也说明了一个变换在满足线性的前提下，保持内积与保持距离是等价的. 而一旦少了线性这个条件，保持距离却未必保持内积了，也就是说正交变换是保持距离的变换，而保持距离的变换不一定是正交变换.

例 5　取 $\mathbb{R}^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$，定义

$$\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n+1)$$

则

$$|\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)-\sigma(y_1, y_2, \cdots, y_n)|=|(x_1, x_2, \cdots, x_n)-(y_1, y_2, \cdots, y_n)|$$

即 σ 为保距映射. 然而 σ 不为线性的，因为若取 $\boldsymbol{x}=(0, 0, \cdots, 0, 1)$，$\boldsymbol{y}=(0, 0, \cdots, 0, 2)$，则

$$\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(0, 0, \cdots, 0, 4)$$

$$\sigma(\boldsymbol{x})+\sigma(\boldsymbol{y})=(0, 0, \cdots, 0, 2)+(0, 0, \cdots, 0, 3)=(0, 0, \cdots, 0, 5)$$

所以 $\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \neq \sigma(\boldsymbol{x})+\sigma(\boldsymbol{y})$，因而 σ 不为线性的.

例 6[6]　在 Euclid 空间中，还有一类与内积相关联的线性变换 —— 对称变换.

Euclid 空间 V 上的线性变换 σ 称为对称的，如果

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\beta}) \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

那么与正交变换类似，在对称变换的定义中也不必事先假设变换 σ 是线性的. 事实上，由于 σ 对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，都有

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\beta})$$

故对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 有

$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\beta})=(\sigma^2\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

从而

$$(\sigma\boldsymbol{\gamma}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=(\sigma^2\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\sigma^2\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})+(\sigma^2\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})=$$
$$(\sigma\boldsymbol{\gamma}, \sigma\boldsymbol{\alpha})+(\sigma\boldsymbol{\gamma}, \sigma\boldsymbol{\beta})=(\sigma\boldsymbol{\gamma}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})$$

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})=(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))+(\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=$$
$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})+(\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})=(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})$$

于是得

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}))=$$
$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))-2(\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})+(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})=$$
$$(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})-2(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})+(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta}, \sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$$

从而

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\theta}$$

故

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\sigma\boldsymbol{\alpha}+\sigma\boldsymbol{\beta})$$

又

$$(\sigma(k\boldsymbol{\alpha})-k\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma(k\boldsymbol{\alpha})-k\sigma\boldsymbol{\alpha})=$$
$$(\sigma(k\boldsymbol{\alpha}), \sigma(k\boldsymbol{\alpha}))-2k(\sigma(k\boldsymbol{\alpha}), \sigma\boldsymbol{\alpha})+k^2(\sigma\boldsymbol{\alpha}, \sigma\boldsymbol{\alpha})=$$
$$(k\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2(k\boldsymbol{\alpha}))-2k(k\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\alpha})+k^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\alpha})=$$
$$k(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2(k\boldsymbol{\alpha}))-2k^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\alpha})+k^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\alpha})=$$
$$k(\sigma^2\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha})-k^2(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\boldsymbol{\alpha})=$$

$$k^2(\sigma^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-k^2(\boldsymbol{\alpha},\sigma^2\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$$

从而

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})-k\sigma\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$$

故

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma\boldsymbol{\alpha}$$

所以 σ 为 V 的线性变换，从而为对称变换.

参考文献：

[1] 吕　恒，徐海静. 关于近世代数中群论学习的探讨 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(2)：131－133.

[2] 冯爱芳，刘祖华. 至多含8个非次正规子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(2)：12－17.

[3] 冯爱芳，段泽勇. 仅含一个非次正规子群共轭类的群 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(10)：5－7.

[4] 郭聿琦，岑嘉评，徐贵桐. 线性代数导引 [M]. 北京：科学出版社，2004.

[5] 刘绍学. 近世代数基础 [M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[6] 杨子胥. 高等代数习题解(下册) [M]. 济南：山东科学技术出版社，2001.

Two Ideas on Linear Transformations in Advanced Algebra

FENG Ai-fang，　LIU Zu-hua

Department of Mathematics，Kunming University，Kunming 650214，China

Abstract：In this paper，properties of linear transformations have been discussed in the following examples divided into two aspects：linear transformations on a linear space of finite dimension and the linear property of linear transformations. The different properties of linear transformations on a linear space of finite dimension and infinite dimension have been enumerated. And the fact that the linear property in the definition of orthogonal transforms and symmetric transformations can be derived by certain conditions is pointed out.

Key words：linear transformation；invertible transformation；orthogonal transformation；symmetric transformation

责任编辑　廖　坤