第 38 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2013 年 12 月
Vol. 38　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0107-05

基于模糊理论的投资组合随机偏好选择模型的改进[①]

罗　丹

百色学院 数学与计算机信息工程系，广西 百色 533000

摘要：证券的收益和风险于投资者来说，其决策的随机性也会使得收益和风险存在不确定性. 利用模糊理论和投资组合模型对收益和风险进行标准化处理，同时引入反映投资者风险偏好的参数，再通过选取不同的偏好参数，从而找到不同参数下的最优组合. 通过实例的数据试验表明根据个人不同的偏好下的投资组合，收益为主、风险为次的组合，得到的结果更优. 同时标准化处理的模型在最优结果上明显优于未作处理的模型，表明了该模型具有一定的实用价值.

关　键　词：投资组合；模糊理论；标准化；最优化

中图分类号：TP301　　　　**文献标志码**：A

在投资决策的选择中，低风险、高收益永远是投资者最大的追求. 对于市场的持续震荡，使得投资风险加剧，因此利用投资组合降低风险便成了一种选择. 本文将主要围绕证券投资进行分析，在证券投资中，可以选择单个证券进行投资，也可以选择多个证券进行投资组合. 因此在投资决策中，如何选择投资组合，就成了投资组合的核心问题.

1　投资组合模型的发展

1952 年美国经济学家 Markowitz[1] 首先提出投资组合理论，对于此理论他做出了大量研究，并取得了很多成果. Markowitz 对收益和风险进行量化，建立投资组合模型，该模型中风险和收益都为目标函数，属于多目标规划问题. Markowitz 模型双目标约束规划问题为：

$$\begin{cases} \min \sigma_p = X^T \sum X \\ \max R_p = X^T R \\ s.\ t.\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

其中 σ_p 表示投资组合的风险，R_p 表示投资组合的收益，X 为各证券的头寸，Σ 为协方差矩阵，R 为各证券的预期收益.

20 世纪 60 年代中期，William F. Sharp，John Lintner，Jan Mossin[2] 发现的资本资产定价模型(CAPM)不仅提供了评价收益-风险可相互转换的可运作框架，称为测量证券风险的一个基础模型(即 β 系

① 收稿日期：2013-06-13
基金项目：广西高校科研项目(2013LX147).
作者简介：罗　丹(1976-)，女，广西巴马人，副教授，主要从事模糊投资决策的研究工作.

数测量). 到1976年, Stephen Ross[3]提出了套利定价模型(APT), 提供了证券风险测量的多维方法, 并且在实践中得到了广泛应用.

投资组合模糊不确定性理论的研究, 在近些年里, 国内外也取得很多值得关注的成果, 利用模糊集、模糊数、模糊区间描述证券的收益率, 并提出了相应的投资组合模型[4]. 1965年, 美国加利福尼亚大学的应用数学家 L. Zadeh[5], 提出了数学上的一个新概念, 在随后的几十年里这个概念得到了迅速的推广, 在心理学、经济学、法学、医学、生物学等领域, 取得了很多重要的成果. 1970年, Bellman, Zadeh[6]建立了模糊决策理论, 为模糊理论的研究奠定了重要的基础. 在1978年, Zadeh[7]进一步提出了与模糊理论相辅相成的随机可能性理论, 为金融学的研究带来了曙光. 在随后的时间里, 关于模糊投资理论的研究也走向了新的历史阶段.

首先, Ramaswamy[8]利用模糊决策理论在国际储备银行的工作报告中提出了一个基于模糊决策理论的债权投资组合模型. Ramaswamy在假定两种情形: 牛市和熊市, 两种资产: 债券和期权的条件下给出了数值实例.

Linern 和 Vercher[9]利用模糊决策的方法处理了投资组合的不确定性. Watada[10]提出了另一种投资组合模型, 该模型与均值-方差模型密切相关, 在其模型中给出了预期收益与风险满意度的隶属函数.

关于区间规划, Ishibuchi[11]和 Chanas[12]等就目标函数系数为区间数的情形做了讨论. 庄新田[13]在将模糊理论运用到有价证券的选择上, 讨论了线型隶属度函数和非线性隶属度函数.

许若宁[14]在模糊环境下讨论了资产组合决策模型的解. 乔峰等[15]将可能性应用到不受约束下的投资组合最优化思想中, 把风险定义为不能实现的最低组合回报率的必要性测度, 提出了可能性分位数投资组合模型和可能性模态法投资组合模型, 两模型充分考虑了回报率之间的相关性以及专家知识在决策中的重要作用.

但在众多学者提出的早期模型中并没有考虑投资者的满意度和投资偏好. 而在涉及投资偏好的模型中, 上面的模型没有考虑到风险的问题, 而且由于多目标规划问题, 在求解上计算复杂, 另外上面的模型也无法确定出对于那些喜好高风险、高收益投资者的最佳投资组合. 本文将对此进行改进, 首先将多目标规划问题转换为单目标规划问题, 引入一个偏好参数 λ.

2 基于模糊理论的投资组合随机偏好选择模型的改进

将多目标转换成单目标模型

$$\begin{cases} \max Z = \lambda X^T R - (1-\lambda) X^T \sum X \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

这是传统的模型, 其中, λ 为0到1之间的任意实数, r 为期望收益, $\sum$为协方差矩阵, 具体形式如下:

$$R = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$$

令

$$r_{\max} = \max_i (r_i), \quad r_{\min} = \min_i (r_i)$$

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

在此模型基础上进行改进, 得到一个更为优化的模型. 首先, 令

$$\sigma_{\max} = \max_i \max_j (\sigma_{ij}) \qquad \sigma_{\min} = \min_i \min_j (\sigma_{ij})$$

就得到了一个在目标函数中同时具有风险和收益的单目标规划问题. 本文的一大创新在于对收益和风险进行了标准化的处理, 通过利用模糊投资理论的知识分别对收益 r 和风险 σ 进行标准化处理, 这使得在模型

中既考虑了投资者对收益风险的整体追求，同时还考虑了不同投资者的满意度.

对收益和风险做标准化处理得到：

$$r_i^{/}=\frac{(r_i-r_{\min})}{r_{\max}-r_{\min}}$$

$$\sigma_{ij}^{/}=\frac{(\sigma_{ij}-\sigma_{\min})}{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}$$

引入风险偏好参数，重新构建目标函数，得到，

$$\max z=\lambda\sum_{i=1}^{n}r_i^{/}x_i-(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij}^{/}$$

λ 为风险偏好参数，λ 的取值不同对应着不同的风险偏好，当 $0\leq\lambda<1/2$ 时，表示决策者为规避风险者(即保守者)；当 $\lambda=1/2$ 时，决策者为风险中性者；当 $1/2<\lambda\leq1$ 时，决策者是偏好风险者(即冒险者). 风险偏好参数的引进为不同的投资者设定了一个最佳投资模型，可以通过选取不同的参数得到每一类投资者的最佳投资比例.

新的模型即为：

$$\max z=\lambda\sum_{i=1}^{n}r_i^{/}x_i-(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij}^{/}$$

$$\text{s. t.}\quad\sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

其中 $r_i^{/}$ 和 $\sigma_{ij}^{/}$ 为改进后的收益和方差，下面通过数值试验来验证一下新的模型，并通过 matlab 来验证经过标准化改进后的模型.

3　数值试验

对于改进后的新模型利用数值试验进行验证，首先看下面这个例子[1]，有 3 种资产分别是普通股、长期债券和国库券. 上述 3 种资产的预期收益率和标准差以及相关性如表 1 所示.

表 1　3 种资产的风险-收益率数据

证券类型	预期收益率/%	标准差/%	相　关　性		
普通股	12.3	20.5	1.0	0.114	−0.5
长期债券	5.4	8.7	0.114	1.0	0.24
国库券	3.7	3.3	−0.5	0.24	1.0

由表 1 可看出：

$$R=[12.3\quad 5.4\quad 3.7]^{\mathrm{T}}$$

同时可以计算得到协方差矩阵：

$$\sum=\begin{bmatrix}420.250 & 20.3319 & -33.825\\ 20.3319 & 75.6900 & 6.8904\\ -33.825 & 6.89040 & 10.89\end{bmatrix}$$

由此可计算出：

$$r_{\max}=\max_i(r_i)\qquad r_{\min}=\min_i(r_i)$$

$$\sigma_{\max}=\max_i\max_j(\sigma_{ij})\qquad \sigma_{\min}=\min_i\min_j(\sigma_{ij})$$

$$r_{\max}=12.3\qquad r_{\min}=3.7$$

$$\sigma_{\max}=420.250\qquad \sigma_{\min}=-33.825$$

计算结果如表 2.

不做任何标准化处理，结果为如表 3.

从表 2 和表 3 的数据对比来看，作标准化处理的模型在最优值上除 $\lambda=0.6$ 时，数据接近，在其它位

置，都要优于未作标准化处理的模型，而且差距很明显，所以说明经过标准化处理的模型更优.

根据计算数据可画出 λ 取值与最优值 z 之间的关系如图 1.

表 2 标准化处理模型结果

λ 取值	最优解(x_1, x_2, x_3)			最优值 z
0	−3.435 0E+14	1.147 8E+14	2.287 8E+14	−3.208 1E+14
0.1	−5.028 8E+15	8.435 0E+14	5.749 1E+15	−2.851 4E+30
0.2	−2.291 9E+20	8.718 0E+19	1.420 0E+20	−1.076 0E+40
0.3	−1.265 7E+16	5.374 0E+15	7.283 0E+15	−4.895 5E+31
0.4	−3.809 5E+19	1.619 3E+19	2.190 2E+19	−5.912 6E+38
0.5	−1.698 0E+18	1.240 8E+18	4.571 0E+17	−1.437 1E+36
0.6	9.046 4E+16	−5.558 2E+16	−6.486 4E+16	−5.274 2E+33
0.7	−3.983 8E+21	1.613 3E+21	2.370 5E+21	−1.134 3E+43
0.8	1.654 5E+16	−6.385 0E+15	−1.016 0E+16	−2.241 4E+32
0.9	−5.757 4E+21	5.919 3E+21	−1.516 0E+20	−2.998 0E+43
1	2.128 0E+20	−5.917 0E+19	−1.536 3E+20	−4.707 8E+40

表 3 未标准化模型

λ 取值	最优解(x_1, x_2, x_3)			最优值 z
0	−2.837 6E+15	0.952 0E+15	1.885 6E+15	−2.278 5E+16
0.1	2.295 3E+17	1.077 2E+17	−3.372 5E+17	−2.999 9E+36
0.2	4.005 7E+20	−1.526 1E+20	−2.479 6E+20	−1.492 4E+43
0.3	1.493 1E+21	−0.494 3E+21	−0.998 8E+21	−4.895 5E+44
0.4	0.262 2E+20	0.783 3E+20	−1.045 4E+20	−4.113 3E+41
0.5	4.757 6E+21	−1.064 5E+21	−3.693 1E+21	−5.391 8E+45
0.6	−2.204 3E+15	2.891 5E+15	−0.687 2E+15	−1.374 6E+33
0.7	1.907 6E+22	−0.444 9E+22	−1.462 7E+22	−1.211 5E+47
0.8	2.975 0E+17	−0.301 4E+17	−2.677 3E+17	−3.454 4E+37
0.9	5.238 9E+27	−2.085 3E+27	−3.153 6E+27	−1.146 2E+58
1	−2.464 3E+20	1.854 4E+19	0.609 9E+20	−2.747 9E+47

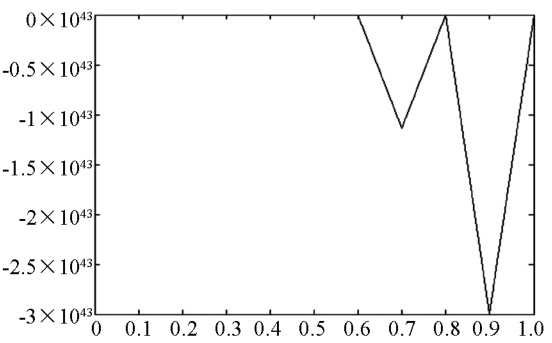

图 1 λ 取值与最优值 z 之间的关系图

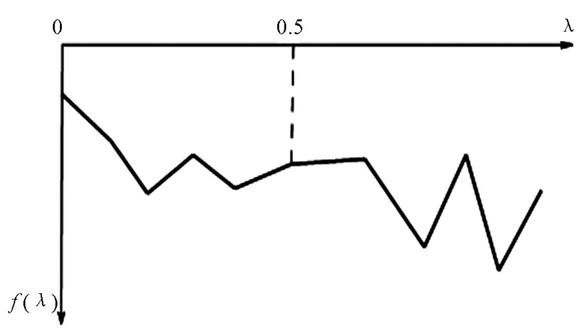

图 2 λ 取值与最优值 z 之间的关系简化图

由于 matlab 图形绘制有限，我们可以进一步简化图 1，绘制出一个更为清晰且涵盖所有点的关系如图 2 所示.

由于我们的目标函数是收益与风险的组合函数，所以由图 2 可知，在风险与收益共存时，注重收益，把风险放在次要位置，往往得到更好的目标值，这也为实际的投资起到了一个很好的指导作用.

4　总　结

文章在美国经济学家 Markowitz 投资组合模型的基础之上，再利用模糊理论对收益和风险进行了标准化处理，并且引入了偏好参数，通过偏好参数的选取，进而得到不同的投资组合方案．从实例中我们可以看出根据自己的喜好得到不同偏好下的投资组合，收益为主、风险为次的组合，得到的结果更优．同时标准化处理的模型在最优结果上，明显优于未作处理的模型，证明了该模型的实用价值所在．

参考文献：

[1] 屠新曙．投资学 [M]．北京：清华大学出版社，2008．

[2] 马雷克·凯宾斯基，托马什·扎斯特温尼克．金融数学 [M]．佟孟华，译．北京：中国人民大学出版社，2009．

[3] 林清泉．金融工程 [M]．北京：中国人民大学出版社，2005．

[4] 程希骏．投资模型中目标函数的修正 [J]．数量经济技术经济研究，1989(11)：34－35．

[5] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control，1965，8(3)：33－35.

[6] BELLMAN R，ZADEH L A. Decision Making in a Fuzzy Environment [J]. Management Science，1970，17(4)：141－164.

[7] ZADEH L A. Fuzzy Sets as a Basic for a Theory of Possiblity [J]. Fuzzy Sets and Systems，1978(1)：3－28.

[8] RAMASWAMY S. Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory [J]. Working Paper of Bank for Intenational Settlements，1998，59(11)：1－20.

[9] LEON T，LIERN V，VERCHER E. Viability of Infeasible Portfolio Selection Problem：a FApproach [J]. European Journal of Operational Research，2002，139(1)：178－189.

[10] WATADA J. Fuzzy Portfolio Model for Decision Making in Investment [J]. Yoshida Y. Dynamical Aspects in Fuzzy Decision Making，Physica Verlag Heidelberg，2001(73)：141－162.

[11] ISHIBUCHI H，TANAKA H. Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function [J]. European Journal of Operational Research，1990，48(2)：219－225.

[12] CHANAS S，KUCHTA D. Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Functions-a Generalized Approach [J]. European Journal of Operational Research，1996，94(3)：594－598.

[13] 庄新田，黄小原，卢　新．证券组合的模糊优化 [J]．东北大学学报：自然科学版，2001，22(2)：165－168．

[14] 许若宁．模糊环境下资产组合决策模型解的讨论 [J]．广州大学学报：自然科学版，2004，3(3)：200－202．

[15] 乔　峰，黄培清，顾　峰．可能性投资组合模型 [J]．上海交通大学学报，2005，9(10)：1606－1610．

On Improvement of Random Preference Portfolio Selection Model Based on Fuzzy Theory

LUO　Dan

Department of Mathematics and Computer Information Engineering，Baise University，Baise 533000，China

Abstract：There are so many uncertain factors in the investment portfolio，two important ones of which are profit and risk in security investment. The definition of uncertainty is broad，and it is classified into the following two elements for investment：One is the external environment，and the other is the investors' random decisions. This paper deals with the studies on the latter，and we obtain the optimal portfolio by different risk preference of investors. At first，the return and risk are normalized by means of fuzzy theory and investment combination model with a parameter which reflects investor' risk attitude，and obtains the optimum relation by choosing different parameter.

Key words：portfolio；fuzzy theory；normalized；optimization

责任编辑　周仁惠