

# 一种数字全通滤波器的最小二乘设计法<sup>①</sup>

刘渭清<sup>1,2</sup>

1. 西安文理学院 物理与机械电子工程学院, 西安 710065;

2. 西安电子科技大学 电子工程学院, 西安 710065

**摘要:** 探讨了在复倒谱系数条件下, 利用加权最小二乘法(WLS)实现等波纹逼近数字全通滤波器的设计方案. 对于平稳的数字全通滤波器, 其分母多项式一定具有最小相位; 该方法是基于最小相位滤波器的群延迟函数和其复倒谱系数之间的关系, 采用最小二乘等波纹逼近求得分母多项式的倒谱系数; 然后, 依据全通滤波器分母多项式与其复倒谱系数的关系求得分母多项式. 由全通滤波器的特性可知, 分母多项式系数可完全确定全通滤波器的传递函数. 这种方法能够使所设计的滤波器的群延迟特性在整个频带上近似理想群延迟, 其误差在整个频带上呈均匀分布, 同时降低了误差的最大值.

**关键词:** 加权最小二乘法(WLS); 全通滤波器; 群延迟; 等波纹逼近; 复倒谱系数; 最小相位

**中图分类号:** TN713.7

**文献标志码:** A

数字全通滤波器常用于实现指定群延迟的线性系统, 以满足整个系统对相位的要求. 有关数字全通滤波器的应用在相关文献中均有描述, 此处不再详述. 文献[1]使用自回归方法从倒谱系数产生滤波器的系数; 文献[2]采用希尔伯特变换的方法, 根据傅立叶变换的相位和对数幅度的关系计算全通滤波器的系数; 文献[3]改进了文献[2], 提出了运算量较小的设计方法; 文献[4]和[5]则采用加权最小均方误差准则意义下求解复倒谱系数, 对文献[3]方法的误差有所改善. 本文采用基于倒谱系数的加权最小二乘逼近法设计数字全通滤波器, 使误差在整个频带上呈等波纹分布且误差的极值明显降低.

## 1 基于复倒谱系数的全通滤波器设计原理

$N$  阶全通数字滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N a_{N-n} z^{-n}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (1)$$

其中  $a_0 = 1$ , 由式(1)可知, 系统可完全由其分母多项式确定. 对于一个平稳的滤波器, 它的分母多项式一定具有最小相位; 而一个最小相位序列的群延迟函数及其复倒谱系数之间满足关系:

$$\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} kc(k) \cos(k\omega) \quad (2)$$

其中复倒谱序列  $c(k)$  一定是实因果序列. 利用傅立叶变换的对称性质, 对式(2)做傅立叶反变换:

① 收稿日期: 2012-12-04

作者简介: 刘渭清(1966-), 男, 西安人, 讲师, 博士研究生, 主要从事信号处理, 模式识别方面的研究.

$$\text{IDFT}[\tau(\omega)] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=1}^{\infty} kc(k) \cos(k\omega) W_M^{-in} = \frac{nc(n)}{2} \quad (3)$$

即,可由群延迟函数求出复倒谱系数;根据复倒谱的基本理论,最小相位序列与其复倒谱系数之间满足:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right) c(k) a_{n-k} \quad n > 0 \quad (4)$$

其中,  $a(0)=1$ . 由式(4)可得分母多项式的系数. 它的主要步骤是:首先,根据指定的全通滤波器群延迟函数,得到分母的群延迟函数;其次,由分母群延迟函数得到分母多项式的倒谱系数;最后,由倒谱系数求得分母多项式的系数,进而确定出滤波器的传递函数,该方法的详细设计原理和步骤可参考文献[3-5].

## 2 基于倒谱系数的最小二乘等波纹逼近法设计原理

通过对上述方法分析可知,其核心思想是由式(2)做傅立叶逆变换求出复倒谱系数,但在滤波器阶数一定的条件下,只能对所求的倒谱系数进行截断,因此造成设计结果的低频和低频附近误差较大. 文献[3]给出滤波器阶数  $N=20$  时的设计结果和误差波形. 对此,本文采用的设计方案是:在滤波器阶数一定的条件下,使设计的分母群延迟函数以等波纹误差近似理想的(设计目标)群延迟函数,从而使设计结果的误差在整个频带上呈均匀分布,进而降低了误差的最大值.

### 2.1 最小二乘等波纹逼近法设计原理

#### 2.1.1 构造加权最小二乘逼近

设  $\tau_{\text{exp}}(\omega)$  是目标群延迟函数(相当于分母群延迟函数),  $\tau_x(\omega)$  为  $\tau_{\text{exp}}(\omega)$  在全频带  $[0, \pi]$  上的逼近函数. 根据最小二乘法(WLS)的相关理论,定义误差函数的加权平方和:

$$E_{\text{mse}} = \sum_{l=1}^K W(\omega_l) E_a^2(\omega_l) \quad (5)$$

其中  $E_a(\omega) = \tau_{\text{exp}}(\omega) - \tau_x(\omega)$  是误差函数,  $W(\omega)$  为加权函数,  $K$  是在误差函数上的采样点数目. 由式(2)可知,逼近函数  $\tau_x(\omega)$  应定义为:

$$\tau_x(\omega) = \sum_{k=1}^N kc(k) \cos(k\omega) \quad (6)$$

上式中  $N$  为滤波器的阶数(不是最终设计的阶数). 令  $b(k) = kc(k)$ , 则式(6)可用矩阵形式表示为  $b^T s(\omega)$ , 其中,

$$b = [b(0), b(1), b(2), \dots, b(N)]^T$$

$$s(\omega) = [1, \cos\omega, \cos2\omega, \dots, \cos N\omega]^T$$

为了使加权平方和  $E_{\text{mse}}$  最小化,令  $\frac{\partial E_{\text{mse}}}{\partial b(i)} = 0$ , 得到一个线性方程组  $Ab = d$ . 其中,

$$A = \sum_{l=1}^k W(\omega_l) s(\omega_l) s^T(\omega_l)$$

$$d = \sum_{l=1}^k W(\omega_l) \tau_{\text{exp}}(\omega_l) s(\omega_l)$$

这里  $A$  是一个实对称的正定矩阵<sup>[6]</sup>. 因此方程有唯一解  $b$ . 在求解方程组时,为了避免求矩阵的逆矩阵,可采用柯列斯基分解法(cholesky decomposition). 求解方程后可以得到使  $E_{\text{mse}}$  最小化时的逼近函数  $\tau_x(\omega)$ . 但此时的误差逼近函数  $|E_a(\omega)|$  并不是等波纹分布的. 图 1 给出了误差函数的一般形式. 有关最小二乘法的详细原理可参阅数值分析教材的相关章节.

#### 2.1.2 加权函数 $W(\omega)$ 的确定

为了实现等波纹逼近,需要确定合适的加权函数. 加权函数  $W(\omega)$  可采用迭代方法来求出. 设  $W_k(\omega)$  是第  $K$  次迭代的加权函数,那么,第  $K+1$  次迭代的加权函数可定义为  $W_{k+1}(\omega) = W_k(\omega) \beta_k(\omega)$ , 更新函数  $\beta_k(\omega)$  可由误差函数  $|E_a(\omega)|$  的包络轨迹来确定<sup>[7]</sup>.

由图 1 可知,  $|E_a(\omega)|$  在  $[0, \pi]$  上的谷底频率处具有局部极小值  $\alpha_i (i=2, 3, \dots, 7)$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_8$  是边界

频率. 误差函数在两个连续的  $\alpha_i$  之间的极大值可表示为:

$$r_i = \max\{|E_a(\omega)|\} \quad \alpha_i \leq \omega_l \leq \alpha_{i+1}$$

其中  $1 \leq i \leq u-1$ ,  $u-1$  为谷底频率的个数,  $\alpha_1$  和  $\alpha_{u+1}$  是滤波器的边界频率. 更新函数可以定义为:

$$\beta_k(\omega_l) = \begin{cases} r_1 & \alpha_1 \leq \omega_l \leq \alpha_2 \\ r_i & \alpha_i < \omega_l \leq \alpha_{i+1} \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, u \quad (7)$$

更新函数  $\beta_k(\omega_l)$  表示了每次迭代后, 误差函数的分布情况. 令

$$q = [\beta_k(\omega_1), \beta_k(\omega_2) \cdots \beta_k(\omega_N)]^T$$

同时令

$$q_{\max} = \max(q)$$

$$q_{\min} = \min(q)$$

设定  $\epsilon$  为一个较小的正数(例如, 0.01), 如果,

$$c = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{q_{\max}} \leq \epsilon$$

成立, 则认为误差函数达到了等波纹分布. 否则, 按  $W_{k+1}(\omega) = W_k(\omega)\beta_k(\omega)$  调整加权函数, 并且对加权函数用其最大值做归一化处理. 在首次运算时, 可设  $W_0(\omega_l) = 1$ . 另外, 为了提高迭代的速度, 可按  $W_{k+1}(\omega) = W_k(\omega)\beta_k^\theta(\omega_l)$  更新权函数, 其中  $\theta$  在 1.2 至 1.7 之间(这一点很必要).

### 2.1.3 最小二乘等波纹逼近法的计算步骤

- 1) 初始化权函数  $W_0(\omega_l)$ ;
- 2) 计算矩阵  $A$  和  $d$ , 并求解线性方程组  $Ab = d$ .
- 3) 计算误差函数  $E_a(\omega)$ .
- 4) 确定  $\alpha_i$  和  $r_i$ ; 进而求得  $\beta_k(\omega_l)$  和  $c$ .
- 5) 如果  $c \leq \epsilon$ (例如 0.01), 计算逼近函数  $\tau_x(\omega)$ , 退出; 否则, 更新权函数, 返回第二步.

## 2.2 求逼近函数 $\tau_x(\omega)$ 所对应的倒谱序列

若设滤波器的阶数为  $N$ , 根据式(6)和式(3), 可求得设计目标(相当于分母多项式)群延迟函数所对应序列的倒谱系数乘以  $K$  的值:

$$kc(k) = 2 * \text{IFFT}[\tau_x(i)] \quad (8)$$

将计算结果代入式(4)即可求得分子多项式系数  $a_n$ , 进而得到所需的全通滤波器的传递函数. 然而, 值得注意的是, 若上述计算没有任何误差, 式(8)的计算结果除前  $N+1$  项外, 其余项应为 0. 但在使用最小二乘法做有限次迭代, 使得最终求得的逼近函数  $\tau_x(\omega)$  存在微小的计算偏差, 从而导致式(8)的计算结果除前  $N+1$  项外, 仍有几项非零值. 这样由式(4)求得的分母多项式的阶数比  $N$  阶要大一些, 但对整体设计效果无影响. 在具体设计时, 可根据设计精度要求确定  $N$ .

## 3 设计举例

文献[3]在设计举例中给定的全通滤波器群延迟特性为

$$\tau(\omega) = (10\omega - 3\omega^2) \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

其特性如图 2 所示. 本文以此为例, 设计一个等波纹逼近全通滤波器并与文献[3]中的方法进行比较. 在设计时, 抽样点数取  $M=512$ , 按照上述各步骤, 分别仿真了阶数等于 20 和 30 两种情况, 经过迭代运算, 最终所得全通滤波器的阶数分别为  $N=26$  和  $N=36$ . 误差函数分别如图 3 和图 4 所示. 可以看出设计结果的误

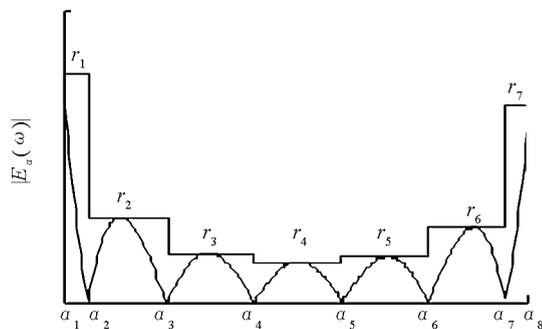


图 1 误差函数的一般形式

差在整个频带上呈均匀分布,且随着阶数的增加误差明显减小.此外,图5给出了在滤波器阶数 $N=26$ 时,采用文献[3]方法设计所得滤波器的群延迟函数及其误差函数.其中,图5的最大绝对误差值为0.2012,而在相同阶数下,本文的最大绝对误差值如图3所示为0.14.下面式(9)列出了 $N=20$ 时采用最小二乘等波纹逼近法设计所得到的26阶滤波器分母多项式的系统函数(式中有效位数稍有取舍).

$$D(z) = 1 - 0.3659z^{-1} - 0.6839z^{-2} + 0.2531z^{-3} + 0.1431z^{-4} - 0.0562z^{-5} - 0.0185z^{-6} + \\ 0.0078z^{-7} - 0.001z^{-8} + 0.0002z^{-9} - 0.0012z^{-10} + 0.0004z^{-11} - 0.0008z^{-12} + \\ 0.0003z^{-13} - 0.0006z^{-14} + 0.0002z^{-15} - 0.0004z^{-16} + 0.0002z^{-17} - 0.0004z^{-18} + \\ 0.0001z^{-19} - 0.0034z^{-20} + 0.0013z^{-21} + 0.0026z^{-22} + 0.001z^{-23} - 0.0005z^{-24} + \\ 0.0002z^{-25} - 0.00008z^{-26} \quad (9)$$

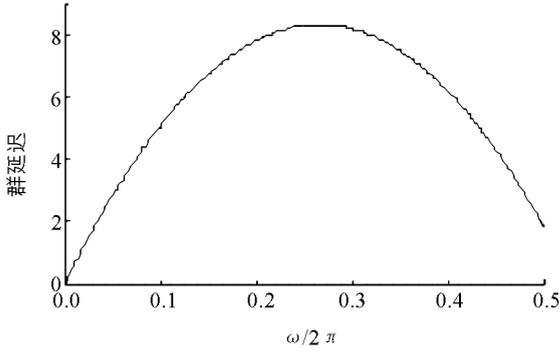


图2 理想群延迟函数

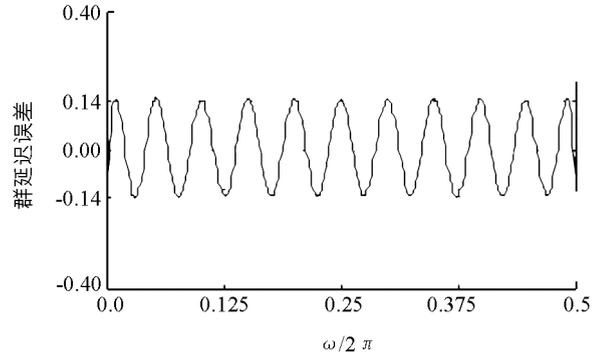


图3 滤波器阶数=26的误差函数

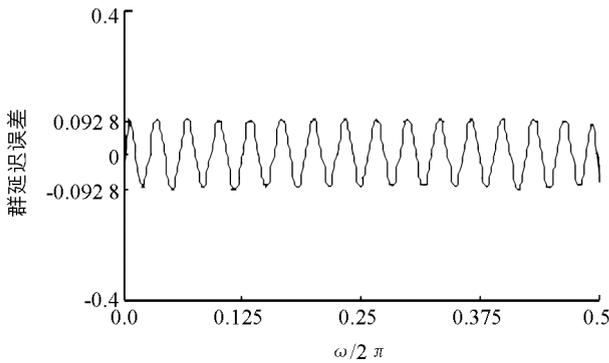


图4 滤波器阶数=36的误差函数

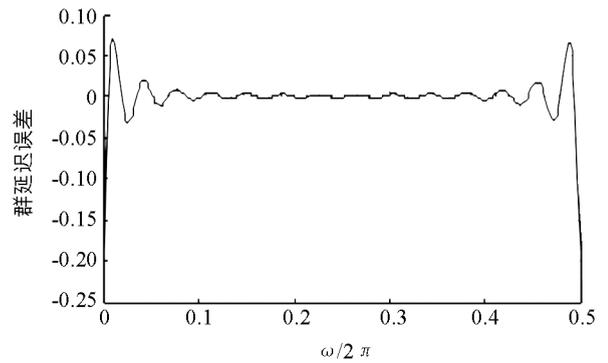


图5 由文献[3]方法所产生的误差函数

## 4 结 论

文中提出了以复倒谱系数为基础,利用最小二乘法实现等波纹逼近数字全通滤波器的设计方法并给出了实验仿真结果.该方法与其它基于倒谱系数的设计方法如文献[3-5]相比,其误差的最大值减小,同时逼近误差在整个频带上均匀分布,且随着阶数的增加,其设计精度明显提高.此外,该方法的设计思路较简单,计算方便,易于应用.

## 参考文献:

- [1] YEGNANARAYANA B. Design of Recursive Group Delay Filters by Autoregressive Modeling [J]. IEEE Trans. Acoust, Spech, Signal Pro-Cessing, 1982, 30: 632-637.
- [2] REDDY G R, SWAMY M N S. Digital All-Pass Filter Design through Discrete Hilbert Transform [J]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1990(1): 646-649.
- [3] RAJAMANI K, YHEAN-SEN L. A Novel Method for Designing Allpass Digital Filter [J]. IEEE Signal Processing

Letters, 1999, 6(8): 207–209.

- [4] JOVANOVIĆ-DOLECEK G, DIAZ-CARMONA J. Digital All-Pass Filter Design Method Based on Complex Cepstrum [J]. Electronics Letters, 2003, 39(8): 695–697.
- [5] 耿 烜, 谢志远. 一种数字全通滤波器的改进设计方法 [J]. 华北电力大学学报, 2004, 31(3): 89–92.
- [6] 王大飞, 耿宏瑞, 刘 静. 稳定矩阵, 正定矩阵和  $M$ -矩阵的新判定 [J]. 西南师范大学学报, 2012, 37(4): 1–4.
- [7] SUNDER S, RAMACHANDRAN V. Design of Equiripple Nonrecursive Digital Differentiators and Hilbert Transforms Using a Weighted Least-Squares Technique [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9): 2504–2509.

## On a Weighted Least-Squares Technique for Design All-pass Digital Filter

LIU Wei-qing<sup>1,2</sup>

1. Mechanical and Electronic Engineering Department, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an 710065, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Xidian university, Xi'an 710065, China

**Abstract:** A procedure for the design of equiripple digital all-pass filter with a weighted least-squares technique based on cepstral coefficients has been presented. The denominator polynomial of a stable allpass filter is certain to have a minimum-phase. Based on the relationship between the delay function and the cepstral coefficients, the complex cepstral coefficients can be determined by a weighted least-squares technique; by means of the complex cepstral coefficients, the all-pass filter denomination coefficients are obtained based on the relation between the complex cepstrum coefficient and the stable minimum phase sequence. The all-pass transfer function is completely determined from its denominator coefficients. The group delay of designed filter can approximate the desired group delay in all band, and error is a uniform distribution.

**Key words:** weighted least-squares; all-pass filter; group delay; equiripple approximation; cepstral coefficients; minimum phase

责任编辑 汤振金

