文章编号:1000-5471(2013)12-0055-06

随机利率下数字幂型期权的定价①

魏广华[1], 袁明霞[2], 王丙均[1], 高启兵[3], 刘国祥[3]

1. 金陵科技学院 基础部,南京 211169;2. 南京大学 金陵学院,南京 210089;
3. 南京师范大学 数学科学学院,南京 210097

摘要: 借助测度变换获得数字幂型期权的一般定价公式,在利率服从扩展的 Vasicek 利率模型时,利用鞅理论和 Girsanov 定理,得到了数字幂型期权的精确定价公式.

关 键 词: 线性区间期权;测度变换;Girsanov 定理

中图分类号: O211.6 **文献标志码:** A

期权作为重要金融衍生工具之一,其理论研究的重点在于两个方面:一个是如何构造出新的期权,以满足不断变化的市场投资的需要;另一个是如何确定这些日趋复杂的期权的价值,即给期权定价的问题.但是期权的定价不仅仅依赖于标的资产到期的价格,还与利率的风险有关,因此考虑随机利率下期权定价的问题是有必要的.

幂型期权是随着金融衍生品市场的不断发展而产生的新型期权[1-6],是一种改变收益结构的期权.期权在到期日的价值不再是标的资产的价值和执行价格之间的价差,而是标的资产的某个指数幂函数与执行价格的关系.

本文研究了在随机利率下数字幂型期权的定价问题.在随机利率下得到的数字幂型期权定价公式实际是文献[4]和文献[7]的推广.

考虑一个随机的跨期经济,不确定性由概率空间(Ω, F, P)表示,F_t 代表时刻 t 的信息流,满足"自然假设",即 F_t 是右连续的和单调递增的,且 F_0 包含所有 F 可测的 P-零测度集.

设 S_t 表示时刻 t 的标的资产价格,$C(t, S_t)$ 是标的资产数字幂型期权在时刻 t 的价格.本文考虑的数字幂型期权的收益函数为如下两种

$$C(T, S_T)=\frac{S_T^{\alpha}}{K_1}I_{(K_1\leqslant S_T<K_2)} \tag{1}$$

$$C(T, S_T)=\frac{S_T^{\alpha}}{K_1}I_{(K_1\leqslant S_T^{\alpha}<K_2)} \tag{2}$$

假设在风险中性测度 Q 下,标的资产价格满足微分方程

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+\sigma_tS_t\mathrm{d}W_t \tag{3}$$

其中:W_t 表示风险中性测度 Q 下的布朗运动,σ_t 是波动率(假设 σ_t 是确定的仅依赖于时间 t 的函数),r_t 表示无风险利率且满足扩展的 Vasicek 模型[8],即

$$\mathrm{d}r_t=(\theta_t-a_tr_t)\mathrm{d}t+\sigma_r(t)\mathrm{d}Z_t \tag{4}$$

---

① 收稿日期:2013-07-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11271193,11201199,10671032,10871001);江苏高校自然科学研究项目(11KJB110005);东南大学博士后基金资助项目(1107010100).
作者简介:魏广华(1979-),男,江苏建湖人,讲师,主要从事风险理论等研究.

其中：θ_t，a_t，$\sigma_r(t)$ 均是时间 t 的确定性函数；Z_t 是风险中性测度 Q 下的另一个布朗运动，与 W_t 的相关系数为 ρ. 故存在与 W_t 独立的布朗运动 $W_1(t)$ 使得

$$\mathrm{d}Z_t = \rho \mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_1(t) \tag{5}$$

通常用来贴现的计价单位是局部无风险的货币市场账户

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)$$

1 相关知识

引理 1[6] 利率满足式(4) 时，对任意的 $s \geqslant t$，有

$$r_s = a(t, s) r_t + \int_t^s \theta_v a(v, s)\mathrm{d}v + \int_t^s \sigma_r(v) a(v, s)\mathrm{d}Z_v \tag{6}$$

其中

$$a(u, v) = \exp(-\int_u^v a_s \mathrm{d}s)$$

引理 2[6]

$$\int_t^T r_s \mathrm{d}s = \tilde{a}(t, T) r_t + \int_t^T \theta_s \tilde{a}(s, T)\mathrm{d}s + \int_t^T \sigma_r(s)\tilde{a}(s, T)\mathrm{d}Z_s \tag{7}$$

其中

$$\tilde{a}(u, v) = \int_u^v a(u, s)\mathrm{d}s$$

贴现债券在时刻 t 的价格为 $B(t, T)$，其中 T 是贴现债券的到期日，由鞅理论

$$B(t, T) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right)\bigg| F_t\right] \tag{8}$$

当利率满足式(4) 时，由文献[6] 有

$$B(t, T) = \exp\left(-\tilde{a}(t, T) r_t - \int_t^T \theta_s \tilde{a}(s, T)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s, T)\mathrm{d}s\right) \tag{9}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}B(t, T)}{B(t, T)} = r_t \mathrm{d}t - \tilde{a}(t, T)\sigma_r(t)\mathrm{d}Z_t$$

由 Ito 公式，满足式(3) 的 S_t 为

$$S_T = S_t \exp\left(\int_t^T r_s \mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 \mathrm{d}s + \int_t^T \sigma_s \mathrm{d}W_s\right)$$

由式(7) 和式(9) 得

$$S_T = \frac{S_t}{B(t, T)}\exp\left(\int_t^T \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_t^T \sigma_r(s)\tilde{a}(s, T)\mathrm{d}Z_s + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s, T)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right)$$

据式(5) 得

$$S_T = \frac{S_t}{B(t, T)}\exp\left(\int_t^T (\sigma_s + \rho\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s, T))\mathrm{d}W_s + \int_t^T \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s, T)\mathrm{d}W_1(s)\right)\cdot$$
$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s, T)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right)$$

定义以货币市场账户为计价单位的 T-远期测度 $\tilde{Q}$ 为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{Q}}{\mathrm{d}Q} = \frac{1}{B(t)B(0, T)} = \exp\left(-\int_0^T \rho\,\tilde{a}(s, T)\sigma_r(s)\mathrm{d}W_s - \int_0^T \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{a}(s, T)\sigma_r(s)\mathrm{d}W_1(s)\right)\cdot$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \tilde{a}^2(s, T)\sigma_r^2(s)\mathrm{d}s\right)$$

由 Girsanov 定理知 $\tilde{Q} \sim Q$，且在 $\tilde{Q}$ 下，

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \rho\,\tilde{a}(s, T)\sigma_r(s)\mathrm{d}s,\ \widetilde{W}_1(t) = W_1(t) + \int_0^t \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{a}(s, T)\sigma_r(s)\mathrm{d}s$$

为布朗运动，从而

$$S_T = \frac{S_t}{B(t,T)} \exp\left(\int_t^T (\sigma_s + \rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T))\mathrm{d}\widetilde{W}_s + \int_t^T \sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s,T)\mathrm{d}s - \int_t^T \rho\,\tilde{a}(s,T)\sigma_r(s)\sigma_s\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2\mathrm{d}s\right)$$

令

$$\sigma_1^2(t,T) = \int_t^T [\sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s,T) + \sigma_s^2 + 2\rho\,\tilde{a}(s,T)\sigma_r(s)\sigma_s]\mathrm{d}s$$

则

$$S_T = \frac{S_t}{B(t,T)} \exp\left(\int_t^T (\sigma_s + \rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T))\mathrm{d}\widetilde{W}_s + \int_t^T \sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t,T)\right) \tag{10}$$

$$S_T^\alpha = \frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)} \exp\left(\int_t^T \alpha(\sigma_s + \rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T))\mathrm{d}\widetilde{W}_s + \int_t^T \alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s) - \frac{\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right) \tag{11}$$

2　主要结果

定理 1　在利率满足式(4)时，收益函数为式(1)的数字幂型期权的价格满足

$$C(t,S_t) = \frac{B(t,T)}{K_1} E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha \cdot I_A | F_t)$$

其中

$$A = (K_1 \leqslant S_T < K_2)$$

证　在风险中性测度 Q 下，

$$C(t,S_t) = B(t)E^Q\left(B^{-1}(T)\frac{S_T^\alpha}{K_1} \cdot I_A \middle| F_t\right) = B(t)E^{\tilde{Q}}\left(B^{-1}(T) \cdot \frac{S_T^\alpha}{K_1} \cdot I_A \cdot \frac{B(T)B(0,T)}{B(T,T)} \middle| F_t\right) \cdot \frac{B(t,T)}{B(t)B(0,T)} = \frac{B(t,T)}{K_1}E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha \cdot I_A | F_t)$$

同理有下述定理 2.

定理 2　在利率满足式(4)时，收益函数为式(2)的数字幂型期权的价格满足

$$C(t,S_t) = \frac{B(t,T)}{K_1} E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha \cdot I_B | F_t)$$

其中

$$B = (K_1 \leqslant S_T^\alpha < K_2)$$

定理 3　在利率满足式(4)时，收益函数为式(1)的数字幂型期权的定价公式为

$$C(t,S_t) = \frac{B(t,T)}{K_1} \cdot \frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)} \exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right) \cdot (N(d_2) - N(d_1))$$

其中

$$d_i = \frac{\ln\dfrac{K_i B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha} - \dfrac{1}{2}\sigma_1^2(t,T)}{\sigma_1(t,T)} \qquad i = 1,2$$

证　由 S_t,$B(t,T)$ 关于 F_t 可测、布朗运动的独立增量性和式(10)可得

$$E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha \cdot I_A | F_t) = \frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)} E^{\tilde{Q}}\left(\exp\left(\int_t^T \alpha(\sigma_s + \rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T))\mathrm{d}\widetilde{W}_s + \int_t^T \alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s) - \frac{\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right) \cdot I_A \middle| F_t\right)$$

令 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{Q}^S}{\mathrm{d}\widetilde{Q}}=\exp\left(\int_0^T \alpha(\rho\,\tilde{a}(s,\ T)\sigma_r(s)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s+\int_0^T \alpha\sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{a}(s,\ T)\sigma_r(s)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(s)\right)\cdot$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T(1-\rho^2)\tilde{a}^2(s,\ T)\sigma_r^2(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T(\rho\,\tilde{a}(s,\ T)\sigma_r(s)+\sigma_s)^2\mathrm{d}s\right)$$

由 Girsanov 定理知 $\widetilde{Q}^S\sim\widetilde{Q}$，且在 $\widetilde{Q}^S$ 下，

$$\widetilde{W}_t^S=\widetilde{W}_t-\int_0^t \alpha(\rho\,\tilde{a}(s,\ T)\sigma_r(s)+\sigma_s)\mathrm{d}s$$

$$\widetilde{W}_1^S(t)=\widetilde{W}_1(t)-\int_0^t \alpha\sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{a}(s,\ T)\sigma_r(s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

为布朗运动，

$$E^{\widetilde{Q}}(S_T^\alpha\cdot I_A\,|\,F_t)=\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,\ T)}E^{\widetilde{Q}^S}\left(\exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,\ T)\right)\cdot I_A\,\middle|\,F_t\right)=$$

$$\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,\ T)}\exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,\ T)\right)\widetilde{Q}^S(A\,|\,F_t)$$

下面计算 $\widetilde{Q}^S(A\,|\,F_t)$，

$$\widetilde{Q}^S(A\,|\,F_t)=\widetilde{Q}^S(S_T<K_2\,|\,F_t)-\widetilde{Q}^S(S_T<K_1\,|\,F_t)$$

由式(10)和式(12)可得

$$S_T<K_1\Leftrightarrow\frac{S_t}{B(t,\ T)}\exp\left(\int_t^T(\rho\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)+\sigma_s)\mathrm{d}\,\widetilde{W}_s{}^S+\int_t^T\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)\right)\cdot$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,\ T)+\int_t^T(\rho\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)+\sigma_s)^2\mathrm{d}s+\int_t^T(1-\rho^2)\sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s,\ T)\mathrm{d}s\right)<$$

$$K_1\Leftrightarrow\int_t^T(\rho\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^S+\int_t^T\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)<$$

$$\ln\frac{K_1B(t,\ T)}{S_t}+\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,\ T)-\sigma_1{}^2(t,\ T)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_t^T(\rho\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^S+\int_t^T\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_r(s)\tilde{a}(s,\ T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)}{\sigma_1(t,\ T)}<$$

$$\frac{\ln\frac{K_1B(t,\ T)}{S_t}-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,\ T)}{\sigma_1(t.\ T)}$$

所以

$$\widetilde{Q}^S(S_T<K_1)=N(d_1)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{K_1B(t,\ T)}{S_t}-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,\ T)}{\sigma_1(t,\ T)}$$

同理

$$\widetilde{Q}^S(S_T<K_2\,|\,F_t)=N(d_2)$$

其中

$$d_2=\frac{\ln\frac{K_2B(t,\ T)}{S_t}-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,\ T)}{\sigma_1(t,\ T)}$$

从而

$$\widetilde{Q}^S(A)=\widetilde{Q}^S(S_T<K_2)-\widetilde{Q}^S(S_T<K_1)=N(d_2)-N(d_1)$$

其中 $N(\cdot)$ 是标准正态的分布函数，从而定理 3 得证.

定理 4 在利率满足式(4)时，收益为式(2)数字幂型期权的定价公式为

$$C(t,S_t)=\frac{B(t,T)}{K_1}\cdot\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)}\exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right)\cdot(N(d_2)-N(d_1))$$

其中

$$d_i=\frac{\ln\frac{K_1B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha}+(\frac{\alpha}{2}-\alpha^2)\sigma_1^2(t,T)}{\alpha\sigma_1(t,T)}\qquad i=1,2$$

证　由 S_t，$B(t,T)$ 关于 F_t 可测、布朗运动的独立增量性和式(11)可得

$$E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha\cdot I_B|F_t)=$$

$$\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)}E^{\tilde{Q}}\left(\exp\left(\int_t^T\alpha(\sigma_s+\rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T))\mathrm{d}\widetilde{W}_s+\int_t^T\alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(t,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t)-\frac{\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right)\cdot I_B\middle|F_t\right)$$

$$E^{\tilde{Q}}(S_T^\alpha\cdot I_B|F_t)=\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)}E^{\tilde{Q}^S}\left(\exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right)\cdot I_B\middle|F_t\right)=$$

$$\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)}\exp\left(\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)\right)\widetilde{Q}^S(B|F_t)$$

下面计算

$$\widetilde{Q}^S(B|F_t)$$

$$\widetilde{Q}^S(B|F_t)=\widetilde{Q}^S(S_T^\alpha<K_2|F_t)-\widetilde{Q}^S(S_T^\alpha<K_1|F_t)$$

$$S_T^\alpha<K_1\Leftrightarrow\frac{S_t^\alpha}{B^\alpha(t,T)}\exp\left(\int_t^T\alpha(\rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^S+\int_t^T\alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)\right)\cdot$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2(t,T)+\int_t^T\alpha^2(\rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)+\sigma_s)^2\mathrm{d}s+\int_t^T\alpha^2(1-\rho^2)\sigma_r^2(s)\tilde{a}^2(s,T)\mathrm{d}s\right)<$$

$$K_1\Leftrightarrow\int_t^T\alpha(\rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^S+\int_t^T\alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)<$$

$$\ln\frac{K_1B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha}+\frac{\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)-\alpha^2\sigma_1{}^2(t,T)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_t^T\alpha(\rho\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)+\sigma_s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^S+\int_t^T\alpha\sqrt{1-\rho^2}\sigma_r(s)\tilde{a}(s,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_1^S(s)}{\alpha\sigma_1(t,T)}<$$

$$\frac{\ln\frac{K_1B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha}+\frac{\alpha}{2}\sigma_1^2(t,T)-\alpha^2\sigma_1{}^2(t,T)}{\alpha\sigma_1(t.T)}$$

从而

$$\widetilde{Q}^S(B|F_t)=N(d_1)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{K_1B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha}+(\frac{\alpha}{2}-\alpha^2)\sigma_1^2(t,T)}{\alpha\sigma_1(t,T)}$$

同理

$$\widetilde{Q}^S(S_T^\alpha<K_2|F_t)=N(d_2)$$

其中

$$d_2=\frac{\ln\frac{K_2B^\alpha(t,T)}{S_t^\alpha}+(\frac{\alpha}{2}-\alpha^2)\sigma_1^2(t,T)}{\alpha\sigma_1(t,T)}$$

从而

$$\widetilde{Q}^S(B|F_t)=\widetilde{Q}^S(S_T^\alpha<K_2)-\widetilde{Q}^S(S_T^\alpha<K_1)=N(d_2)-N(d_1)$$

定理 4 得证.

参考文献：

[1] 王亚军，周圣武，张 艳. 基于新型期权-欧式幂期权的定价研究 [J]. 甘肃科学学报，2005，17(2)：21－23.

[2] 王献东. 扩散模型下几种奇异期权的定价研究 [D]. 合肥：合肥工业大学，2007.

[3] 白斐斐. 幂型期权的定价及推广 [D]. 新疆：新疆大学，2007.

[4] 佟 威，徐赐文. 基于等价鞅测度的一种幂型期权的推广 [J]. 中央民族大学学报：自然科学版，2013，22(1)：88－91.

[5] 刘丽霞，李英红，石 凌. 随机利率下线性区间期权的定价公式 [J]. 河北师范大学学报：自然科学版，2013，37(2)：129－133.

[6] 李淑锦，李胜宏. 随机利率下奇异期权的定价公式 [J]. 数学学报，2008，51(2)：299－310.

[7] 王继红，欧阳异能. 随机利率情形下幂型期权定价问题 [J]. 兵团教育学院学报，2010，20(2)：32－35.

[8] VASICEK O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure [J]. Journal of Financial Economics，1977，5(2)：177－188.

Pricing of Digital Power-Option Under Stochastic Interest Rate

WEI Guang-hua[1]， YUAN Ming-xia[2]， WANG Bing-jun[1]，
GAO Qi-bing[3]， LIU Guo-xiang[3]

1. Jinling Institute of Technology，Nanjing 211169，China；
2. Jinling College of Nanjing University，Nanjing 210089，China；
3. Nanjing Normal University，Nanjing 210097，China

Abstract：A general pricing formula for digital power-option is derived by measurement transformation. Then an analytic pricing formula for digital power-option is given in an extended Vasicek interest rate framework by applying the martingale theory and Girsanov theorem.

Key words：linear segment option；measurement transformation；Girsanov theorem

责任编辑 张 构