第 38 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2013 年 12 月
Vol. 38 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0050-05

求解二维热传导方程的高精度紧致差分方法①

魏 剑 英

宁夏大学 数学计算机学院,银川 750021

摘要: 基于 Richardson 外推法提出了一种数值求解二维热传导方程的高阶紧致差分方法. 该方法首先利用时间二阶、空间四阶精度的紧致交替方向隐式(ADI)差分格式在不同尺寸的网格上对原方程进行求解,然后利用 Richardson 外推技术外推一次,最终得到了二维热传导方程时间四阶、空间六阶精度的数值解,数值实验验证了该方法的高阶精度及有效性.

关 键 词: 二维热传导方程;ADI 方法;高精度紧致格式;Richardson 外推法

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

热传导方程是一类非常重要的偏微分方程,在数值传热学和计算流体力学领域有广泛的应用. 在用有限差分法求解中,最常见的是古典显格式、古典隐格式和 Crank-Nicholson 格式[1]. 古典显格式计算简便,但稳定性差;古典隐格式和 Crank-Nicholson 格式均是无条件稳定的,但空间最高仅有二阶精度,并且对于高维问题一般需要迭代求解,计算代价较大;另一种方法是交替方向隐式(ADI)方法,常见的有 Peaceman-Racharford (P-R)格式和 Douglas 格式[1],尽管可以采用追赶法进行求解,计算量较省,但也是低精度的. 近年来,不少研究者提出了关于热传导方程的高精度紧致差分格式,包括显式格式[2-3]、隐式格式[4-5]和 ADI 格式[6-7],它们均是无条件稳定的. 对于高精度紧致显格式,仍然受到很强的稳定性条件的限制;而对于高精度紧致隐格式,尽管文献[5]采用多重网格方法进行迭代加速,计算效率较传统迭代法有了很大改善,但是较高精度的 ADI 方法计算量还是多出很多. 此外,程晓亮等人还提出了一类利用 lie 乘积公式对一维热传导方程的初边值问题设计的无条件稳定的修正差分格式[8]. 本文在已有的时间二阶、空间四阶精度的紧致 ADI 差分格式的基础上,借助 Richardson 外推法,进一步将时间和空间的精度整体提高二阶,最终可得到求解该问题时间为四阶、空间为六阶精度的数值解.

1 二维热传导方程高阶紧致 ADI 格式

考察如下二维热传导方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \qquad (x,y,t)\in\Omega\times(0,T] \tag{1}$$

$$u(x,y,t)=g(x,y,t) \qquad (x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,T] \tag{2}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y) \qquad (x,y)\in\Omega \tag{3}$$

式中,$(x,y)\in\Omega$,$\partial\Omega$ 为边界;$u(x,y,t)$ 为待求函数;$f(x,y,t)$ 为源项;g 和 u_0 为已知函数,且具有充分的光滑性;a 为热扩散系数或导温系数. 用 τ 表示时间步长,空间取等距网格,步长用 h 表示. 由文献[6]可得方程(1) 的高精度紧致 ADI 格式为

① 收稿日期:2013-02-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061025,11361045);霍英东教育基金会高等院校青年教师基金(121105).
作者简介:魏剑英(1980-),女,安徽砀山人,硕士,讲师,主要从事偏微分方程数值解和计算流体力学的研究工作.

$$\begin{cases}\left[1+\left(\frac{h^2}{12}-\frac{a\tau}{2}\right)\delta_x^2\right]u_{i,j}^{*}=\left[1+\left(\frac{h^2}{12}+\frac{a\tau}{2}\right)\delta_x^2\right]\left[1+\left(\frac{h^2}{12}+\frac{a\tau}{2}\right)\delta_y^2\right]u_{i,j}^{n}+\\ \frac{\tau}{2}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)(f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j}^{n})\\ \left[1+\left(\frac{h^2}{12}-\frac{a\tau}{2}\right)\delta_y^2\right]u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{*}\end{cases} \tag{4}$$

过渡变量 $u_{i,j}^{*}$ 的边界条件可以精确表示为

$$u_{i,j}^{*}=\left[1+\left(\frac{h^2}{12}-\frac{a\tau}{2}\right)\delta_y^2\right]g_{i,j}^{n+1} \tag{5}$$

其中 δ_x^2 和 δ_y^2 表示二阶中心差分算子，该格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$. 下面采用 Von Neumann 分析法对格式(4) 进行稳定性分析. 设源项无误差，特征项表示为

$$u_{ij}^{n}=\eta^{n}e^{I\theta_x i}e^{I\theta_y j}$$

其中，$I=\sqrt{-1}$，η^n 为第 n 个时间层上的波幅，θ_x 和 θ_y 分别为波长 λ_1 和 λ_2 所对应的相角. 则格式(4) 的放大因子 $G(\theta_x,\theta_y)=\eta^{n+1}/\eta^{n}$ 可以表示成

$$G(\theta_x,\theta_y)=l(\theta_x)l(\theta_y)$$

其中

$$l(\theta_x)=\frac{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta_x}{2}-\frac{2a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\theta_x}{2}}{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta_x}{2}+\frac{2a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\theta_x}{2}}$$

$$l(\theta_y)=\frac{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta_y}{2}-\frac{2a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\theta_y}{2}}{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta_y}{2}+\frac{2a\tau}{h^2}\sin^2\frac{\theta_y}{2}}$$

很容易证明 $|l(\theta_x)|\leqslant 1$，$|l(\theta_y)|\leqslant 1$，因此 $G(\theta_x,\theta_y)\leqslant 1$，即格式(4) 是无条件稳定的.

2　Richardson 外推法

选取正整数 M 和计算所需要到达的时刻 T，并令 $h=1/M$，$N=T/\tau$. 四阶紧致格式(4) 可写为

$$\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_t u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\\ \frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{6}$$

截断误差为

$$R_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=\tau^2\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\left[\frac{1}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,y_j,t_{n+\frac{1}{2}})-\right.\\ \left.\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,y_j,t_{n+\frac{1}{2}})-\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial t^2}(x_i,y_j,t_{n+\frac{1}{2}})\right]+\\ \frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{ah^4}{240}\left[\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\right.\\ \left.\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i,y_j,t_{n+\frac{1}{2}})+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x_i,y_j,t_{n+\frac{1}{2}})\right]+O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \tag{7}$$

假设 $\{u(x_i,y_j,t_n)\mid 0\leqslant i,j\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N\}$ 为定解问题(1) ~ (3) 的解，$\{u_{i,j}^{n}(h,\tau)\mid 0\leqslant i,j\leqslant M,0\leqslant n\leqslant N\}$ 为差分格式(4) 的解，记 $e_{i,j}^{n}=u(x_i,y_j,t_n)-u_{i,j}^{n}$，$0\leqslant i,j\leqslant M$，$0\leqslant n\leqslant N$，则得到误差方程

$$\begin{cases}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_t e_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 e_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 e_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\\ \frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t e_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+R_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \qquad 0\leqslant i,\ j\leqslant M-1,\ 0\leqslant n\leqslant N-1\\ e_{i,j}^0=0 \qquad 0\leqslant i,\ j\leqslant M-1\\ e_{i,j}^n=0 \qquad i,\ j\in\partial\Omega_h,\ 0\leqslant n\leqslant N\end{cases} \tag{8}$$

假设 $r(x,y,t)$ 和 $s(x,y,t)$ 分别满足二维热传导方程的初边值问题

$$\frac{\partial r}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+p_1(x,y,t) \qquad (x,y,t)\in\Omega\times(0,T]$$

$$r(x,y,t)=0 \qquad (x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,T]$$

$$r(x,y,0)=0 \qquad (x,y)\in\Omega$$

和

$$\frac{\partial s}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)+p_2(x,y,t) \qquad (x,y,t)\in\Omega\times(0,T]$$

$$s(x,y,t)=0 \qquad (x,y,t)\in\partial\Omega\times(0,T]$$

$$s(x,y,0)=0 \qquad (x,y)\in\Omega$$

其中

$$p_1(x,y,t)=\frac{1}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x,y,t)-\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x,y,t)-\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial t^2}(x,y,t)+\frac{a^2}{4}\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial y^2\partial t}(x,y,t)$$

$$p_2(x,y,t)=\frac{a}{240}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x,y,t)+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}(x,y,t)\right]$$

则

$$r=\{r_{i,j}^n(h,\tau)\,|\,0\leqslant i,\ j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N\}$$

$$s=\{s_{i,j}^n(h,\tau)\,|\,0\leqslant i,\ j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N\}$$

分别为紧致差分格式

$$\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_t r_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 r_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 r_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t r_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)(p_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{9}$$

和

$$\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_t s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t s_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)(p_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tag{10}$$

的解，且

$$r(x_i,y_j,t_n)=r_{i,j}^n(h,\tau)+O(\tau^2+h^4)$$

$$s(x_i,y_j,t_n)=s_{i,j}^n(h,\tau)+O(\tau^2+h^4)$$

记

$$q_{i,j}^n=e_{i,j}^n-\tau^2 r_{i,j}^n-h^4 s_{i,j}^n$$

由上述定义，用(8)－(9)$\times\tau^2$－(10)$\times h^4$ 可得

$$\begin{cases}\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_t q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)\delta_x^2 q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+a\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\delta_y^2 q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}- \\ \frac{a^2\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2\delta_t q_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+(p_3)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \qquad 0\leqslant i,\ j\leqslant M-1,\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ q_{i,j}^0=0 \qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant M-1 \\ q_{i,j}^n=0 \qquad i,\ j\in\partial\Omega_h,\ 0\leqslant n\leqslant N\end{cases}$$

其中

$$(p_3)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}=R_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{h^2}{12}\delta_y^2\right)[\tau^2(p_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+h^4(p_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}]= O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6)$$

即

$$u(x_i,\ y_j,\ t_n)-[u_{i,j}^n(h,\ \tau)+\tau^2 r(x_i,\ y_j,\ t_n)+h^4 s(x_i,\ y_j,\ t_n)]= O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \tag{11}$$

同理，有

$$u(x_i,\ y_j,\ t_n)-\left[u_{2i,\ 2j}^{4n}\left(\frac{h}{2},\ \frac{\tau}{4}\right)+\left(\frac{\tau}{4}\right)^2 r(x_i,\ y_j,\ t_n)+\left(\frac{h}{2}\right)^4 s(x_i,\ y_j,\ t_n)\right]= O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6) \tag{12}$$

用(12)$\times\frac{16}{15}$－(11)$\times\frac{1}{15}$可得

$$u(x_i,\ y_j,\ t_n)-\left[\frac{16}{15}u_{2i,\ 2j}^{4n}\left(\frac{h}{2},\ \frac{\tau}{4}\right)-\frac{1}{15}u_{i,j}^n(h,\ \tau)\right]=O(\tau^4+\tau^2h^4+h^6)\quad 0\leqslant i,\ j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N$$

即分别在区域 Ω_h 和 $\Omega_{\frac{h}{2}}$ 上得到解 $u_{i,j}^n(0\leqslant i,\ j\leqslant M)$ 和 $u_{i,j}^{4n}(0\leqslant i,\ j\leqslant 2M)$，其中($0\leqslant n\leqslant N$)．综上所述，用 Richardson 外推法，可得到方程(1) 在 Ω_h 上截断误差为 $O(\tau^4+h^6)$ 的近似值，即

$$u_{i,j}^n=\frac{16}{15}u_{2i,\ 2j}^{4n}\left(\frac{h}{2},\ \frac{\tau}{4}\right)-\frac{1}{15}u_{i,j}^n(h,\ \tau) \qquad 0\leqslant i,\ j\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant N \tag{13}$$

3 数值算例

利用本文提出的方法求解如下有精确解的初边值问题，初始条件和边界条件均由精确解给出．

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+\frac{x^2+y^2-3-3t}{(1+x^2+y^2+t)^2} \qquad 0\leqslant x,\ y\leqslant 1,\ t\geqslant 0$$

其精确解为：

$$u(x,\ y,\ t)=\ln(1+x^2+y^2+t)$$

表1给出了该问题当 $\tau=h^2$，$t=0.125$ 时，在不同网格步长下的最大误差 *Error*，收敛阶 *Rate* 和 *CPU* 时间以及与高精度紧致 ADI 方法[6]计算结果的比较．其中，误差收敛阶定义为 $rate=\ln(Error(2h)/Error(h))/\ln 2$．可以看出，高精度紧致 ADI 格式在空间上的精度达到了四阶，而本文 Richardson 外推法对于提高计算精度，效果是非常显著的，在空间上达到了六阶．在相同的网格等分数下，本文格式较文献[6]格式需要更多的 *CPU* 时间，是因为本文格式需要在2个不同的网格层上进行计算，并且要用到 Richardson 外推，而文献[6]格式只需要在单层网格上进行计算．但如果我们限定计算需要达到的精度，比如 1.44e-8，采用文献[6]的格式，需要取 $h=1/32$，*CPU* 时间为 0.34 s，而采用本文方法，只需要取 $h=1/8$，误差即可达到 3.96e-9，而 *CPU* 时间仅为 0.04 s．

表2给出了该问题当 $\tau=h^2$，$t=1$ 时刻，本文方法的最大误差 *Error*，*CPU* 时间和收敛阶 *Rate* 及与文献[7]中结果的比较．文献[7]采用紧致的 ADI 方法进行求解．通过对比可以看出，本文方法的精度明显高于文献[7]格式的精度．如果限定计算需要达到的精度，采用本文方法可以大大节约 *CPU* 时间．

表 1　$\tau=h^2$，$t=0.125$ 时刻，最大误差、收敛阶和 CPU 时间

h	文献[6]			本文方法		
	CPU	*Error*	*rate*	*CPU*	*Error*	*rate*
1/8	0.01	3.52e-6		0.04	3.96e-9	
1/16	0.06	2.21e-7	4.00	0.15	6.16e-11	6.01
1/32	0.34	1.44e-8	3.93	0.72	9.30e-13	6.05

表 2　$\tau=h^2$，$t=1$ 时刻，最大误差、收敛阶和 CPU 时间

h	文献[7]			本文方法		
	CPU	*Error*	*rate*	*CPU*	*Error*	*rate*
1/10	0.14	1.71e-5		0.34	1.09e-9	
1/20	0.58	1.22e-6	4.00	1.28	1.60e-11	6.01
1/40	2.46	7.90e-8	3.93	5.72	2.06e-13	6.05

参考文献：

[1] 陆金甫，关　治．偏微分方程数值解法［M］．2 版．北京：清华大学出版社，2004．

[2] 曾文平．三维热传导方程的一族两层显格式［J］．应用数学和力学，2000，21(9)：966－972．

[3] 刘继军．二维热传导方程的三层显式差分格式［J］．应用数学和力学，2003，24(5)：537－544．

[4] 田振夫．非齐次热传导方程的高精度隐式格式［J］．宁夏大学学报：自然科学版，1996，17(3)：34－38．

[5] 葛永斌，田振夫，吴文权．二维抛物型方程的高精度多重网格解法［J］．应用数学，2003，16(2)：13－18．

[6] LIAO W，ZHU J，KHALIQ A Q M．An Efficient High-Order Algorithm for Solving Systems of Reaction-Diffusion Equations［J］．Numer Methods Partial Differential Eq，2002，18(3)：340－354．

[7] DAI W，NASSAR R．Compact ADI Method for Solving Parabolic Differential Equations［J］．Numer Methods Partial Differential Eq，2002，18(2)：129－142．

[8] 程晓亮，车明刚．解热传导方程的一类新修正差分格式［J］．西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(2)：12－16．

On a High-Order Compact Difference Method for Solving the Two-Dimensional Heat Equation

WEI Jian-ying

College of Mathematics and Computer Science，Ningxia University，Yinchuan 750021，China

Abstract：A high-order compact difference method，which is based on the Richardson extrapolation technique，has been proposed to solve the two-dimensional heat equation. Firstly，numerical results have been obtained on different-size meshes by means of a high order alternating direction implicit (ADI) difference scheme，which is second order accurate in time and fourth order accurate in space. Then，the Richardson extrapolation method has been employed to compute a more accurate solution，which is fourth order accurate in time and sixth order accurate in space. The numerical results are given to demonstrate the high accuracy and effectiveness of the present method.

Key words：two-dimensional heat equation；ADI method；high-order compact scheme；Richardson extrapolation method

责任编辑　周仁惠