第 38 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2013 年 12 月
Vol. 38 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0043-07

具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络的全局指数同步①

汤千文[1], 秦发金[2]

1. 贺州学院,广西 贺州 542800;2. 柳州师范高等专科学校 数学与计算机科学系,广西 柳州 545004

摘要: 研究了一类具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络全局指数同步问题. 利用 ρ-锥理论和微分不等式分析技巧,获得了保证其误差系统全局指数稳定的充分条件,同时也给出了同步指数收敛速率的估计. 最后,列举一个例子表明我们所得结果的有效性.

关 键 词: 离散 Cohen-Grossberg 神经网络;脉冲;全局指数同步;微分不等式

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A

1983 年自 Cohen 等[1] 提出 Cohen-Grossberg 神经网络以来,由于该模型在模式识别、联想记忆与优化控制上有重要意义,因此,受到许多学者的重视,并对连续 Cohen-Grossberg 神经网络进行了多方面的研究,比如文献[2-5]. 然而,在连续神经网络的实际应用及其数值计算过程中,往往需要考虑相应的离散系统. 目前具有时滞或无时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络也已出现许多好结果,比如文献[6-9]. 随着混沌控制与同步的提出,有关混沌神经网络的控制与同步吸引了许多研究人员的兴趣,如文献[10-14]. 最近文献[15] 研究了一类具有时滞的离散神经网络

$$x_i(n+1)=x_i(n)\mathrm{e}^{-a_i h}+\theta_i(h)\Big[\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(x_j(n-k))+I_i\Big] \tag{1}$$

指数同步问题,其中 $i=1,2,\cdots,n$, $h\in(0,+\infty)$ 是离散化步长. 利用给定的条件构造相应的不等式,获得了其驱动系统和响应系统全局指数同步的充分条件.

然而,除了时滞的影响,脉冲现象也广泛存在于神经网络中. 据我们所知,目前还很少见关于具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络的指数同步研究,因此,本文考虑下面具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络

$$\begin{aligned}x_i(m+1)=&x_i(m)-a_i(m,x_i(m))\Big[b_i(m,x_i(m))-\sum_{j=1}^{n}c_{ij}f_j(x_j(m))-\\&\sum_{j=1}^{n}d_{ij}g_j(x_j(m-\tau_{ij}(m)))-I_i\Big],\ m\neq m_k\qquad i=1,2,\cdots,n\\x_i(m+1)=&H_{ik}(x_1(m),\cdots,x_n(m))+J_{ik}(m),\ m=m_k\qquad i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{2}$$

的指数同步问题,其中 $x_i(m)$ 表示第 i 个神经元在时刻 m 的状态,$a_i(m,\cdot)$ 是放大函数,$b_i(m,\cdot)$ 为恰当的行为函数,c_{ij}, d_{ij} 为第 i 个神经元到第 j 个神经元的连接权,$f_j(\cdot)$, $g_j(\cdot)$ 为激活函数,$\tau_{ij}(m)$ 表示传输

---

① 收稿日期:2011-09-20

作者简介:汤千文(1958-),男,广西贺州人,副教授,主要从事数学教育和微分方程方面的研究.

时滞且满足 $0 \leqslant \tau_{ij}(m) \leqslant \tau$，$I_i$ 表示外部输入，固定时间序列 m_k 满足 $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \cdots$，$\lim\limits_{k \to \infty} m_k = \infty$.

设 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{R}^n_+)$ 表示 n 维(非负)实列向量空间，$\boldsymbol{R}^{m\times n}(\boldsymbol{R}^{m\times n}_+)$ 表示 $m\times n$ 维(非负)实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵. 对 A，$B \in R^{m\times n}$ 或 A，$B \in R^n$，$A \geqslant B(A > B)$ 表示 A 和 B 的每一个对应元素满足"$\geqslant$"或"$>$". 特别，如果 $A \geqslant 0(A \in R^{n\times n})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵；如果 $\boldsymbol{z} > 0(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n)$，则称 $\boldsymbol{z}$ 为正向量.

记 $N[a, b] \equiv \{a, a+1, \cdots, b\}$，这里 $a < b$ 且 a，b 是整数. $C(C_\Omega)$ 表示所有函数 φ：$N[-\tau, 0] \to R^n(\Omega)$ 构成的集合. 对 $x \in R^n$，$A \in R^{n\times n}$，$\varphi \in C$，我们定义

$$[x]^+ = (|x_1|, \cdots, |x_n|)^T,\ [A]^+ = (|a_{ij}|)_{n\times n},\ [\varphi(m)]_\tau =$$
$$([\varphi_1(m)]_\tau, \cdots, [\varphi_n(m)]_\tau)^T,\ [\varphi_1(m)]^+_\tau = [[\varphi(m)]^+]_\tau$$

其中

$$[\varphi_i(m)]_\tau = \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \{\varphi_i(m+s)\}$$

再定义

$$\| x \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\} \qquad \| A \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \qquad \| \varphi \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{[\varphi_i(m)]^+_\tau\}$$

假设驱动系统为(2)，其响应系统设为如下形式：

$$\begin{aligned} y_i(m+1) = {} & y_i(m) - a_i(m, y_i(m))[b_i(m, y_i(m)) - \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(y_j(m)) - \\ & \sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(y_j(m - \tau_{ij}(m))) + I_i] + u_i(m),\ m \neq m_k \qquad i = 1,2,\cdots,n \\ y_i(m+1) = {} & H_{ik}(y_1(m), \cdots, y_n(m)) + J_{ik},\ m = m_k \qquad i = 1,2,\cdots,n,\ k = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

为了使系统(2)和(3)达到同步状态，需要选取适当的控制器，使得系统(4)全局指数稳定. 为此我们选取如下的时滞状态反馈控制器

$$u_i(m) = \sum_{j=1}^n m_{ij}[f_j(y_j(m)) - f_j(x_j(m))] + \sum_{j=1}^n n_{ij}[g_j(y_j(m - \tau_{ij}(m))) - g_j(x_j(m - \tau_{ij}(m)))] \tag{4}$$

定义同步误差为 $e(m) = (e_1(m), \cdots, e_n(m))^T$，$e_i(m) = y_i(m) - x_i(m)$，于是由(2)、(3)和(4)式可得如下同步误差系统

$$\begin{aligned} e_i(m+1) = {} & e_i(m) - [a_i(m, y_i(m))b_i(m, y_i(m)) - a_i(m, x_i(m))b_i(m, x_i(m))] + \\ & [a_i(m, y_i(m)) - a_i(m, x_i(m))]\sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(y_j(m)) + a_i(m, x_i(m)) \\ & \sum_{j=1}^n c_{ij}[f_j(y_j(m)) - f_j(x_j(m))] + \\ & [a_i(m, y_i(m)) - a_i(m, x_i(m))]\sum_{j=1}^n d_{ij} g_j(y_j(m - \tau_{ij}(m))) + \\ & a_i(m, x_i(m))\sum_{j=1}^n d_{ij}[g_j(y_j(m - \tau_{ij}(m))) - g_j(x_j(m - \tau_{ij}(m)))] + \\ & [a_i(m, y_i(m)) - a_i(m, x_i(m))]I_i + \sum_{j=1}^n m_{ij}[f_j(y_j(m)) - f_j(x_j(m))] + \\ & \sum_{j=1}^n n_{ij}[g_j(y_j(m - \tau_{ij}(m))) - g_j(x_j(m - \tau_{ij}(m)))],\ m \neq m_k \qquad i = 1,2,\cdots,n \\ e_i(m+1) = {} & H_{ik}(y_1(m), \cdots, y_n(m)) - H_{ik}(x_1(m), \cdots, x_n(m)),\ m = m_k \\ & i = 1,2,\cdots,n,\ k = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

定义 1 对任意 $\phi, \varphi \in C$，如果存在常数 $M \geqslant 1$ 和 $\lambda > 0$，使得

$$\| e(m) \| \leqslant M \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-\lambda m},\ m \geqslant 0$$

则称驱动系统(2)和响应系统(3)是全局指数同步，其中 λ 是全局指数同步速率.

为了得到本文的主要结果，我们作出如下假设：

(H_1) 存在正常数 α_i，L_i^a 使得

$$0 < a_i(m,\cdot) \leqslant \alpha_i,\ |a_i(m,x) - a_i(m,y)| \leqslant L_i^a |x-y|,\ \forall x,y \in R,\ i=1,2,\cdots,n$$

(H_2) 存在正常数 γ_i 使得

$$\gamma_i \leqslant \frac{a_i(m,x)b_i(m,x) - a_i(m,y)b_i(m,y)}{x-y} < 1,\ \forall x,y \in R,\ x \neq y,\ i=1,2,\cdots,n$$

(H_3) 存在正常数 M_j，L_j^f，N_j，L_j^g，$j=1,2,\cdots,n$，使得

$$|f_j(x)| \leqslant M_j,\ |f_j(x) - f_j(y)| \leqslant L_j^f|x-y|,\ |g_j(x)| \leqslant N_j,\ |g_j(x) - g_j(y)| \leqslant L_j^g |x-y|$$
$$\forall x,y \in R,\ x \neq y,\ j=1,2,\cdots,n$$

(H_4) 存在非负矩阵 $R_k = (\mu_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ 使得

$$|H_{ik}(u_1,\cdots,u_n) - H_{ik}(v_1,\cdots,v_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}^{(k)} |u_j - v_j|$$
$$\forall (u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n) \in R^n,\ i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots$$

对非负矩阵 $\boldsymbol{A} \in R_+^{n\times n}$，以 $\rho(A)$ 表示其谱半径，相应的其特征空间表示为

$$W_\rho(\boldsymbol{A}) \triangleq \{z \in R^n \,|\, \boldsymbol{A}z = \rho(\boldsymbol{A})z\}$$

由文献[16]知只要非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个正特征向量，则 $\Omega_\rho(A)$ 就包含了 A 的所有正特征向量.

引理 1[16]　设 $M \in R_+^{n\times n}$ 且 $\rho(M) < 1$，则存在正向量 $\boldsymbol{z}$ 使得$(E-A)z > 0$，这里 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

当 $M \in R_+^{n\times n}$ 且 $\rho(M) < 1$ 时，记

$$\Omega_\rho(M) \triangleq \{z \in R^n \,|\, (E-M)z > 0,\ z > 0\}$$

由引理 1 知 $\Omega_\rho(M)$ 非空，并且对任意 z_1，$z_2 \in \Omega_\rho(M)$ 有

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 \in \Omega_\rho(M) \qquad \forall k_1,\ k_2 > 0$$

所以 $\Omega_\rho(M)$ 是 R^n 中一个没有表面的锥. 本文称之为“ρ-锥”.

引理 2　时滞差分不等式

$$u(m+1) \leqslant Pu(m) + Qu(m-\tau(m)),\ m \geqslant m_0 \tag{6}$$

的初始条件 $u(s) \in C$，$s \in N[m_0 - \tau,\ m_0]$. 设 P，$Q \in R_+^{n\times n}$ 且 $\rho(P+Q) < 1$. 若初始条件满足

$$u(s) \leqslant z\mathrm{e}^{-\lambda(s-m_0)},\ s \in N[m_0-\tau,\ m_0] \tag{7}$$

这里 $z = (z_1,\cdots,z_n)^T \in \Omega_\rho(P+Q)$，$m_0 \in Z$. 则对满足(6)式的任意解 $u(m)$ 都有

$$u(m) \leqslant z\mathrm{e}^{-\lambda(m-m_0)},\ m \geqslant m_0$$

其中对给定的 z，正常数 λ 满足不等式

$$(\mathrm{e}^{\lambda}(P + Q\mathrm{e}^{\lambda\tau}) - E)z \leqslant 0$$

1　主要结果

定理 1　假设条件(H_1)－(H_4)成立，并且满足下面条件：

(H_5) $\rho(P+Q) < 1$，这里

$$P = (_{p\,ij},\ p_{ij} = (\alpha_i |c_{ij}| + |m_{ij}|)L_j^f,\ i \neq j,\ p_{ii} =$$
$$1 - \gamma_i + L_i^a \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| M_j + L_i^a \sum_{j=1}^{n} |d_{ij}| N_j + L_i^a |I_i| +$$
$$(\alpha_i |c_{ii}| + |m_{ii}|)L_i^f,\ Q = (_{q\,ij},\ q_{ij} = (\alpha_i |d_{ij}| + |n_{ij}|)L_j^g$$

(H_6) 集合 $\Omega = \bigcap_{k=1}^{q} [W_\rho(R_k)] \cap \Omega_\rho(P+Q)$ 非空.

(H_7) 令 $\delta_k \geqslant \max\{1, \rho(R_k)\}$，并假设存在常数 η 使得 $\dfrac{\ln\delta_k}{m_k - m_{k-1}} \leqslant \eta < \lambda$，$k=1,2,\cdots$，其中正常数 λ 满足不等式

$$(e^{\lambda}(P + Qe^{\lambda\tau}) - E)z \leqslant 0 \tag{8}$$

对任意给定的 $z \in \Omega$. 则驱动系统(2) 和响应系统(3) 是全局指数同步的，其指数同步收敛速率为 $\lambda - \eta$.

证 因为 $\rho(P+Q) < 1$ 且 $P+Q \in R_{+}^{n\times n}$，所以由引理1知存在 $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \Omega_\rho(P+Q)$ 使得 $(E-(P+Q))z > 0$. 再利用连续性知，一定存在常数 $\lambda > 0$ 使得 $(E - e^{\lambda}(P+Qe^{\lambda\tau}))z \geqslant 0$，即至少存在正常数 λ 满足不等式(8).

由(5)式，结合条件(H_1)－(H_3)得

$$\begin{aligned}
|e_i(m+1)| \leqslant\ & |e_i(m)| - \gamma_i|e_i(m)| + L_i^a|e_i(m)|\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|M_j + \\
& \alpha_i\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|L_j^f|e_j(m)| + L_i^a|e_i(m)|\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}|N_j + \\
& \alpha_i\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}|L_j^g|e_j(m-\tau_{ij}(m))| + L_i^a|e_i(m)|\,|I_i| + \\
& \sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|L_j^f|e_j(m)| + \sum_{j=1}^{n}|n_{ij}|L_j^g|e_j(m-\tau_{ij}(m))| = \\
& \Big[1-\gamma_i + L_i^a\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|M_j + L_i^a\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}|N_j + L_i^a|I_i|\Big]|e_i(m)| + \\
& \sum_{j=1}^{n}(\alpha_i|c_{ij}| + |m_{ij}|)L_j^f|e_j(m)| + \sum_{j=1}^{n}(\alpha_i|d_{ij}| + |n_{ij}|)L_j^g|e_j(m-\tau_{ij}(m))| \triangleq \\
& \sum_{j=1}^{n}p_{ij}|e_j(m)| + \sum_{j=1}^{n}q_{ij}|e_j(m-\tau_{ij}(m))| \\
& m_{k-1} \leqslant m \leqslant m_k \qquad i=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

这里 $m_0=0$. 由初始条件 $\phi - \varphi \in C$ 可知

$$|e_i(m)| \leqslant dz_i\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda m},\ m \in N[-\tau, 0]$$

这里 $d_i = \dfrac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{z_i\}}$，$z=(z_1, \cdots, z_n)^T \in \Omega_\rho(P+Q)$，$\lambda$ 满足不等式(8).

因为 $z \in \Omega \subseteq \Omega_\rho(P+Q)$，所以由 ρ-锥的性质有 $dz\|\phi-\varphi\| \in \Omega_\rho(P+Q)$，因此利用引理2可得

$$|e_i(m)| \leqslant dz_i\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda m} \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_1 \tag{9}$$

又假设对所有 $q=1, 2, \cdots, k$，下面不等式都成立

$$|e_i(m)| \leqslant \delta_0\cdots\delta_{q-1}dz_i\|\psi_1-\psi_2\|e^{-\lambda m} \qquad m_{q-1} \leqslant m \leqslant m_q \tag{10}$$

这里 $\delta_0=1$. 从条件(H_4)，(H_7) 和(5) 式可得

$$\begin{aligned}
|e_i(m_q+1)| \leqslant\ & |H_{ik}(y_1(m_q), \cdots, y_n(m_q)) - H_{ik}(x_1(m_q), \cdots, x_n(m_q))| \leqslant \\
& \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}^{(q)}|e_j(m_q)| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}^{(q)}|e_j(m_q)|\delta_0\cdots\delta_{q-1}dz_j\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda(m-m_0)} = \\
& \delta_0\cdots\delta_{q-1}\rho(R_q)dz_i\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda(m-m_0)} \leqslant \\
& \delta_0\cdots\delta_q dz_i\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda(m-m_0)} \qquad i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

结合(10) 式得

$$|e_i(m)| \leqslant \delta_0\cdots\delta_{k-1}\delta_k dz_i\|\phi-\varphi\|e^{-\lambda m} \qquad m_{k-1} \leqslant m \leqslant m_k+1 \tag{11}$$

再次利用 ρ-锥的性质知 $\delta_0\cdots\delta_{k-1}\delta_k dz\|\phi-\varphi\| \in \Omega_\rho(P+Q)$，因此由引理2可得

$$|e_i(m)| \leqslant \delta_0 \cdots \delta_{k-1}\delta_k d z_i \| \phi - \varphi_2 \| \mathrm{e}^{-\lambda m} \qquad m_k + 1 \leqslant m \leqslant m_{k+1}$$

结合(10)式得

$$|e_i(m)| \leqslant \delta_0 \cdots \delta_{k-1}\delta_k d z_i \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-\lambda m} \qquad m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1}$$

故由数学归纳法有

$$|e_i(m)| \leqslant \delta_0 \cdots \delta_{k-1}\delta_k d z_i \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-\lambda m} \qquad m_{k-1} \leqslant m \leqslant m_k$$

结合 $\delta_k \leqslant \mathrm{e}^{\eta(m_k - m_{k-1})}$，$k=1,2,\cdots$，可得

$$|e_i(m)| \leqslant \mathrm{e}^{\eta m_k} d z_i \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-\lambda m} \leqslant \mathrm{e}^{\eta m} d z_i \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-\lambda m} = d z_i \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-(\lambda-\eta) m}, \ m_{k-1} \leqslant m \leqslant m_k$$

故

$$\| e(m) \| \leqslant \theta \| \phi - \varphi \| \mathrm{e}^{-(\lambda-\eta) m} \qquad m_{k-1} \leqslant m \leqslant m_k \tag{12}$$

这里 $\theta = d z_i \geqslant 1$. 从而根据定义 1 可知，驱动系统(2)和响应系统(3)是全局指数同步的，其指数同步收敛速率为 $\lambda - \eta$.

2　应用举例

考虑具有脉冲和变时滞的离散 Cohen-Grossberg 神经网络

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1(m+1) = \frac{1}{8}x_1(m) - \frac{1}{32}\sin x_1(m) + \frac{1}{32}x_2(m) + \\ \frac{1}{32}x_1(m-\tau_{11}(m)) - \frac{1}{32}x_1(m-\tau_{12}(m)) \\ x_2(m+1) = \frac{1}{10}x_2(m) + \frac{1}{40}\sin x_1(m) - \frac{1}{40}x_2(m) + \\ \frac{1}{40}x_1(m-\tau_{11}(m)) - \frac{1}{40}x_2(m-\tau_{12}(m)) \end{array}\right\}, \ m \neq m_k \\ x_1(m_k+1) = \mathrm{e}^{0.04k} x_1(m_k) \\ x_2(m_k+1) = \mathrm{e}^{0.04k} x_2(m_k) \end{array}\right\} \tag{13}$$

其中 $|\tau_{ij}(m)| = |\sin(i+j)m| \leqslant 1 \triangleq \tau$，$i,j=1,2$，$m_1=3$，$m_k = m_{k-1}+k$，$k=2,3,\cdots$. 取 $a_i(m,x) \equiv 1$，$i=1,2$，$b_1(m,x_1(m)) = \frac{7}{8}x_1(m)$，$b_2(m,x_2) = \frac{9}{10}x_2(m)$，$I_1(m) = I_2(m) = 0$，$f_1(x) = f_1(x) = \sin x$，$g_1(x) = g_1(x) = x$. 设系统(13)为驱动系统，其响应系统为

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y_1(m+1) = \frac{1}{8}y_1(m) - \frac{1}{32}\sin y_1(m) + \frac{1}{32}y_2(m) + \\ \frac{1}{32}y_1(m-\tau_{11}(m)) - \frac{1}{32}y_1(m-\tau_{12}(m)), \\ y_2(m+1) = \frac{1}{10}y_2(m) + \frac{1}{40}\sin y_1(m) - \frac{1}{40}y_2(m) + \\ \frac{1}{40}y_1(m-\tau_{11}(m)) - \frac{1}{40}y_2(m-\tau_{12}(m)) \end{array}\right\}, \ m \neq m_k \\ \left.\begin{array}{l} x_1(m_k+1) = \mathrm{e}^{0.04k} x_1(m_k) \\ x_2(m_k+1) = \mathrm{e}^{0.04k} x_2(m_k) \end{array}\right\} \end{array}\right. \tag{14}$$

取反馈控制器

$$u_i(m) = \sum_{j=1}^{2} m_{ij}[f_j(y_j(m)) - f_j(x_j(m))] + \sum_{j=1}^{2} n_{ij}[g_j(y_j(m-\tau_{ij}(m))) - g_j(x_j(m-\tau_{ij}(m)))] \qquad i=1,2$$

这里 $m_{11}=\frac{27}{160}$, $m_{12}=\frac{11}{160}$, $m_{21}=\frac{27}{120}$, $m_{22}=\frac{1}{10}$, $n_{11}=\frac{13}{96}$, $n_{12}=\frac{3}{32}$, $n_{21}=\frac{37}{120}$, $n_{22}=\frac{3}{40}$. 直接计算可得

$$R_k=\mathrm{e}^{0.04k}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad \rho(R_k)=\mathrm{e}^{0.04k}$$

$$P+Q=\begin{pmatrix}\frac{37}{60}&\frac{9}{40}\\\frac{1}{2}&\frac{17}{40}\end{pmatrix}\qquad \rho(P+Q)=0.869\,7<1$$

$$W_\rho(R_k)=\{(z_1,z_2)^T\mid z_1,z_2\in R\}$$

$$\Omega_\rho(P+Q)=\left\{(z_1,z_2)^T\mid (z_1,z_2)^T>0,\ \frac{20}{23}z_1<z_2<\frac{46}{27}z_1\right\}$$

因此 $\Omega=\{(z_1,z_2)^T\mid (z_1,z_2)^T>0,\ z_1=z_2\}$非空. 不妨取 $z=(1,1)^T\in\Omega$, 存在常数 $\lambda=0.05$ 满足不等式

$(\mathrm{e}^{\lambda}(P+Q\mathrm{e}^{\lambda\tau})-E)z<0$, 因此

$$\delta_k=\mathrm{e}^{0.04k}\geqslant\max\{1,\mathrm{e}^{0.04k}\},\ \frac{\ln\delta_k}{m_k-m_{k-1}}\leqslant\frac{\ln\mathrm{e}^{0.04k}}{k}=0.04<\lambda\qquad k=1,2,\cdots$$

容易验证条件(H_1)-(H_4)都成立,故由定理1知(13)和(14)是全局指数同步的,其同步指数收敛速率为0.01. 显然,文献[10-15]的结果不能用于系统(13),这说明本文的控制方法是有效可行的.

参考文献:

[1] COHEN M, GROSSBERG S. Absolute Stability of Global Pattern Formation and Parallel Memory Storage by Competitive Neural Networks [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1983, 13: 815-826.

[2] ZHAO H, WANG K. Dynamical Behaviors of Cohen-Grossberg Neural Networks with Delays and Reaction Diffusion Terms [J]. Neurocomputing, 2006, 70: 536-543.

[3] REN F, CAO J. Periodic Solutions for a Class of High-Order Cohen-Grossberg Type Neural Networks with Delays [J]. J Comput Math Appl, 2007, 54: 836-839.

[4] LI Z, LI K. Stability Analysis of Impulsive Cohen-Grossberg Neural Networks with Distributed Delays and Reaction Diffusion Terms [J]. Appl Math Modelling, 2009, 33: 1337-1348.

[5] LI Y. Existence and Stability of Periodic Solutions for Cohen-Groeeberg Neural Networks with Multiple Delays [J]. Chaos, Solitions and Fractals, 2004, 20: 459-466.

[6] 李宝麟, 王 蓉. 离散时刻Cohen-Grossberg时滞神经网络周期解的存在性与稳定性 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2009, 45(2): 5-9.

[7] 刘启明, 杨建法, 吴辰余. 具有变时滞离散Cohen-Grossberg神经网络的周期解 [J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(6): 621-630.

[8] XIONG W, CAO J. Global Exponential Stability of Discrete-Time Cohen-Grossberg Neural Networks [J]. Neurocomputing, 2005, 64: 433-446.

[9] ZHAO H, WANG L. Stability and Bifurcation for Discrete-Time Cohen-Grossberg Neural Network [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 179: 787-798.

[10] LU W, CHEN T. Synchronization Analysis of Linearly Coupled Networks of Discrete Time Systems [J]. Physica D, 2004, 198: 148-168.

[11] RANGARAJIAN G, DING M. Stability of Synchronized Chaos in Coupled Dynamical Systems [J]. Phys Lett A, 2002, 296: 204-209.

[12] LIU X, CHEN T. Synchronization Analysis for Nonlinearly-Coupled Complex Networks with an Asymmertrical Coupling Matrix [J]. Physica A, 2008, 387: 4429-4439.

[13] HUANG X, CAO J. Generalized Synchronization for Delayed Chaotic Neural Networks: A Novel Coupling Scheme [J].

Nonlinearity，2006，19：2797－2811.

[14] LI P，CAO J，WANG Z. Robust Impulsive Synchronization of Coupled Delayed Neural Networks with Uncertainties [J]. Physica A，2007，373：261－272.

[15] 吴然超. 时滞离散神经网络的同步控制 [J]. 物理学报，2009，58(1)：139－142.

[16] ZHAO H，WANG L. Stability and Bifurcation for Discrete-Time Cohen-Grossberg Neural Network [J]. Applied Mathematics and Computation，2006(179)：787－798.

On Global Exponential Synchronization for a Class of Discrete-Time Cohen-Grossberg Neural Network with Time-Varying Delays and Impulses

TANG Gan-wen[1]，　QIN Fa-jin[2]

1. *Hezhou University，Hezhou 542800；*

2. *Department of Mathematics and Computer Science，Liuzhou Teachers College，Liuzhou 545004，China*

Abstract：In this paper，the global exponential synchronization for a class of discrete-time Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays and impulses has been discussed. With the properties of ρ-cone and differential inequality analysis techniques，some sufficient conditions have been derived to ensure the global exponential stability for the error system，and the synchronization exponential convergence rate obtained. Finally，an example is given to illustrate the effectiveness of our results.

Key words：discrete-time Cohen-Grossberg neural network；impulses；global exponential synchronization；difference inequality

责任编辑　汤振金