文章编号:1000-5471(2013)12-0038-05

一个新的 Hilbert 型积分不等式及其逆[①]

巫伟亮

嘉应学院 数学学院,广东 梅州 514011

摘要: 通过估算权函数,应用实分析的技巧,建立了新的含有混合核的双参数型 Hilbert 型积分不等式及其等价形式,并证明了其常数因子为最佳值. 作为应用,还考虑了其逆向的情形及一些特殊的结果.

关 键 词: 权函数; Hilbert 型积分不等式; 混合核; 逆式

中图分类号: O178　　**文献标志码:** A

设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$, $0<\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$, $0<\int_0^{\infty}g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$, 则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left[\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\infty}g^q(y)\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right]^p\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中常数因子 $\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$ 和 $\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right]^p$ 分别是(1)式和(2)式的最佳值[1-2]. (1)式是著名的 Hardy-Hilbert 型积分不等式,在分析学中有重要应用[3],(2)式是(1)式的等价形式. 关于(1),(2)式的推广和改进,近年已取得了很多成果[4-8].

本文利用估算权函数的方法及实分析的思想,引入双参数 λ_1,λ_2,建立了一个新的含有混合核为 $\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}$ 的 Hilbert 型积分不等式,证明了其常数因子是最佳值,并考虑了其等价及逆向形式.

1 若干引理

引理 1 若 $\lambda_1,\lambda_2>0$,定义如下的权函数:

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(y)=\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\qquad y>0 \tag{3}$$

则 $\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(y)$ 是一个与 y 无关的正数,且 $\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(y)=\frac{2}{\lambda_1}\ln\frac{3}{2}$.

① 收稿日期: 2012-09-03
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(7004344); 嘉应学院育苗工程资助项目(2012KJM02).
作者简介: 巫伟亮(1983-),男,广东梅州人,硕士研究生,讲师,主要从事解析不等式的研究.

证 对(3)式作变换 $u=\frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_2}}$,有

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(y)=\frac{1}{\lambda_1}\int_0^{\infty}\frac{\min\{1,u\}}{1+u+\max\{1,u\}}u^{-1}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{1}{\lambda_1}\left(\int_0^1\frac{1}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right)=\frac{2}{\lambda_1}\ln\frac{3}{2}$$

注1 由引理1的证明过程,还有

$$\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(x)=\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{2}{\lambda_2}\ln\frac{3}{2}\qquad x>0 \tag{4}$$

引理2 若 $p>1$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$\lambda_1,\lambda_2>0$,$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非负可测,则有

$$J=\int_0^{\infty}y^{-1}\left(\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}f(x)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\leqslant\left(\frac{2\ln\frac{3}{2}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\right)^p\int_0^{\infty}x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

证 由正向的 Hölder 不等式[9],有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}f(x)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\mathrm{d}x=\\&\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\left[\frac{x^{\frac{1}{q}}}{y^{\frac{1}{p}}}f(x)\right]\left[\frac{y^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{q}}}\right]\mathrm{d}x\leqslant\\&\left\{\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\\&\left\{\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\frac{y^{q-1}}{x}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}=\\&y^{\frac{1}{p}}[\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(y)]^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{6}$$

由引理1的计算结果,应用 Fubini 定理[10],有

$$\begin{aligned}J\leqslant&\left[\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1}\right]^{p-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\left[\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1}\right]^{p-1}\int_0^{\infty}\omega_{\lambda_1,\lambda_2}(x)x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2 主要结果

定理1 若 $p>1$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$\lambda_1,\lambda_2>0$,$f(x)\geqslant 0$,$g(y)\geqslant 0$,$0<\int_0^{\infty}x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$,$0<\int_0^{\infty}y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$,则有如下的等价不等式

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\\&\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\left\{\int_0^{\infty}x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{7}$$

$$J=\int_0^{\infty}y^{-1}\left[\int_0^{\infty}\frac{\min\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}f(x)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},y^{\lambda_2}\}}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<$$

$$\left[\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\right]^p\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

证　由定理 1 和 Hölder 不等式中严格不等的条件，(6) 式取严格不等号，(5) 式亦然．故(8) 式成立．一方面，由正向的 Hölder 不等式[9]，有

$$\begin{aligned}I=&\int_0^\infty\left[y^{-\frac{1}{p}}\int_0^\infty\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}f(x)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}\mathrm{d}x\right][y^{\frac{1}{p}}g(y)]\,\mathrm{d}y\leqslant\\&J^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{9}$$

由(8) 式可得(7) 式．另一方面，令

$$g(y)=y^{-1}\left[\int_0^\infty\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}f(x)}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}\mathrm{d}x\right]^{p-1}$$

则 $J=\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y$．由(5) 式得 $J<\infty$．若 $J=0$，则(8) 式成立；若 $J>0$，则由(7) 式，有

$$0<\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y=J=I<\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\left\{\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

$$J^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\left\{\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

对(11) 式两边 p 次方，则(8) 式成立，且与(7) 式等价．

定理 2　在定理 1 的条件下，(7) 式与(8) 式的常数因子 $\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$ 及 $\left[\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\right]^p$ 都是最佳值．

证　任意给定 $\varepsilon>0$，设

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,\ 1)\\ x^{-\frac{\lambda_1\varepsilon}{p}-1} & x\in[1,\ \infty)\end{cases}$$

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases}0 & y\in(0,\ 1)\\ y^{-\frac{\lambda_2\varepsilon}{q}-1} & y\in[1,\ \infty)\end{cases}$$

则可算得

$$\tilde{J}=\left\{\int_0^\infty x^{p-1}\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty y^{q-1}\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}\lambda_2^{\frac{1}{q}}\varepsilon}$$

由 Fubini 定理，令 $u=\frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_2}}$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{I}=&\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_1^\infty y^{-\frac{\lambda_2\varepsilon}{q}-1}\left[\int_1^\infty\frac{\min\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}{x^{\lambda_1}+y^{\lambda_2}+\max\{x^{\lambda_1},\ y^{\lambda_2}\}}x^{-\frac{\lambda_1\varepsilon}{p}-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\\&\frac{1}{\lambda_1}\int_1^\infty y^{-\lambda_2\varepsilon-1}\left[\int_{y^{-\lambda_2}}^\infty\frac{\min\{1,\ u\}}{1+u+\max\{1,\ u\}}u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=\\&\frac{1}{\lambda_1}\left\{\int_1^\infty y^{-\lambda_2\varepsilon-1}\left[\int_{y^{-\lambda_2}}^1\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}}}{2+u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y+\int_1^\infty y^{-\lambda_2\varepsilon-1}\left[\int_1^\infty\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y\right\}=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\left\{\int_0^1\left(\int_{u^{-\frac{1}{\lambda_2}}}^{\infty} y^{-\lambda_2\varepsilon-1}\mathrm{d}y\right)\frac{1}{2+u}u^{-\frac{\varepsilon}{p}}\mathrm{d}u+\frac{1}{\lambda_2\varepsilon}\int_1^{\infty}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right\}=$$

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\varepsilon}\left[\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]$$

若存在正数 $k\leqslant\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$，使其取代(7)式的常数因子$\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$后仍然成立，则代入 $\tilde{f},\tilde{g}$，由上面的证明过程及计算结果，有

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\left[\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]=\varepsilon\tilde{I}<\varepsilon k\tilde{J}=k\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{p}}\lambda_2^{\frac{1}{q}}}\tag{12}$$

由 Fatou 引理[10] 及(12)式，有

$$\frac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\left[\int_0^1\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\leqslant\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]\leqslant k$$

故 $k=\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$ 必为(7)式的最佳值．(8)式的常数因子$\left[\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\right]^p$ 必为最佳值，否则，由(9)式必导出(7)式的常数因子不为最佳值，矛盾．

定理3 依定理1所设，若把 $p>1$ 改为 $0<p<1$，则有(7)式与(8)式的逆向等价式，且相应的常数因子仍为最佳值．

证 证法与定理1、定理2的证法类似．先由逆向的 Hölder 不等式[9]，有(5)式及(9)式的逆式．由此易得(8)式的逆式．再利用(9)式的逆式可得(7)式的逆式．反之，设有(7)式的逆式，置与定理1相同的 $g(y)$，则由(5)式的逆式知 $J>0$．若 $J=\infty$，则(8)式的逆式自然成立；若 $J<\infty$，则由(7)式的逆式，易得(10)式和(11)式的逆式，故有(8)式的逆式，且与(7)式的逆式等价．

若有 $k\geqslant\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$，使其取代(7)式的逆式的常数因子$\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}$后仍成立，则由(12)式的逆式，有

$$\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\left[\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u+\int_1^{\infty}\frac{u^{-\frac{\varepsilon}{p}-1}}{1+2u}\mathrm{d}u\right]>k\tag{13}$$

设 $0<\varepsilon_0<|q|$，则当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，有 $u^{\frac{\varepsilon}{q}}\leqslant u^{\frac{\varepsilon_0}{q}}$，$u\in(0,1]$，$\displaystyle\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon_0}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{q}}$．由 L 控制收敛定理[10] 有$\displaystyle\int_0^1\frac{u^{\frac{\varepsilon}{q}}}{2+u}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1}{2+u}\mathrm{d}u+o(1)(\varepsilon\to0^+)$．在(13)式中，令 $\varepsilon\to0^+$，有$\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\geqslant k$，故$\dfrac{2\ln\frac{2}{3}}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}=k$ 为(7)式的逆式最佳值．(8)式的逆式的常数因子必为最佳值，否则，由(9)式的逆式必能导出矛盾．

注2 在(7)式、(8)式中，取 $p=q=2$，$\lambda_1=\lambda_2=1$，可得文献[11]中具有最佳常数因子的(19)式与(20)式．

参考文献：

[1] HARDY G H. Note on a Theorem of Hilbert Concerning Series of Positive Terms [J]. Proc London Math Soc, 1925, 23(2): XLV-XLVL.

[2] HARDY G H，LITTEWOOD J E，POLYA G. Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

[3] MITRINOVIC D S，PECARIC J，FINK A M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives [M]. Boston：Kluwer Academic Publishers，1991.

[4] 杨必成. 参量化的 Hilbert 不等式 [J]. 数学学报，2006，49(5)：1121－1126.

[5] XU Jing-shi. Hardy-Hilbert's Inequalities with Two Parameters [J]. Advancesin Mathematics，2007，36(2)：63－76.

[6] 巫伟亮. 一个含多参数的新 Hilbert 型积分不等式及其应用 [J]. 西北师范大学学报：自然科学版，2012，48(6)：26－30.

[7] 杨必成. 一个新的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：40－44.

[8] 刘　琼，张晓健. 一个具有最佳常数的双参数 Hilbert 型不等式 [J]. 湖南师范大学学报：自然科学版，2006，29(3)：5－8.

[9] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南：山东科学技术出版社，2004.

[10] 匡继昌. 实分析引论 [M]. 长沙：湖南教育出版社，1996.

[11] 巫伟亮. 一个新的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 嘉应学院学报：自然科学版，2009，27(3)：5－7.

On a New Hilbert-Type Integral Inequality and Its Reverse

WU Wei-liang

School of Mathematics，Jiaying University，Meizhou Guangdong 514011，China

Abstract：In this paper，by means of weight function and the technique of real analysis，a new Hilbert-type integral inequality with a mix kernel and a best constant factor has been established. As applications，its equivalent form and the reverse forms have also been considered.

Key words：weight function；Hilbert-type integral inequality；mix kernel；reverse

责任编辑　廖　坤