第 38 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2013 年 12 月
Vol. 38　No. 12　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Dec.　2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0033-05

一类 Neumann-Steklov 共振问题解的存在性①

郭苗苗，　吴行平，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究了带有非线性边界条件的二阶偏微分椭圆方程，利用变分方法证明了一类 Neumann-Steklov 共振问题解的存在性.

关　键　词： 共振问题；变分方法；(PS)条件；非线性边界条件

中图分类号：O176.3　　　　**文献标志码：A**

考虑椭圆方程的非线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x, u) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g(x, u) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N (N \geqslant 2)$ 的具有光滑边界的有界区域，$\boldsymbol{n}$ 是单位外法向量. 函数 $c: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 和非线性项 $f(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$，$g(x, t) \in C(\partial\Omega \times \mathbb{R})$，且满足以下条件：

(f_1) $c \in L^s(\Omega)$，其中当 $N \geqslant 3$ 时，$s \geqslant \dfrac{N}{2}$；当 $N = 2$ 时，$s \geqslant 1$. 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 都有 $c(x) \geqslant 0$ 成立，且 $c(x)$ 在正测度集上严格大于零，于是 $\int_\Omega c(x)\mathrm{d}x > 0$.

(f_2) 存在常数 $a_1, a_2 > 0$，$0 \leqslant p < \dfrac{2N}{N-2}$，使得

$$|f(x, t)| \leqslant a_1 + a_2 |t|^{p-1} \qquad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$$

(f_3) 存在常数 $b_1, b_2 > 0$，$0 \leqslant q < \dfrac{2(N-1)}{N-2}$，使得

$$|g(x, t)| \leqslant b_1 + b_2 |t|^{q-1} \qquad x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}$$

已有很多作者利用上下解的方法对问题(1)进行了研究，如文献[1]及其参考文献. 对问题(1)也有一些分散的结果是关于带有边界特征参数的[2]. 文献[3]引入了 Neumann-Steklov 特征值线的概念，并且得出了问题(1)在第一个 Neumann-Steklov 特征值下的结果：

定理 A[3]　假设条件(f_1)-(f_3)满足，令 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\mathrm{d}s$，$G(x, t) = \int_0^t g(x, s)\mathrm{d}s$，且满足条件：

(f'_4) 存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，使得

$$\limsup_{|t| \to \infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} \leqslant \lambda < \lambda_1 \qquad \limsup_{|t| \to \infty} \frac{2G(x, t)}{t^2} \leqslant \mu < \mu_1 \tag{2}$$

---

① 收稿日期：2013-06-04
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071198).
作者简介：郭苗苗(1989-)，女，陕西铜川人，硕士研究生，主要从事泛函分析的研究.
通信作者：唐春雷，教授，博士生导师.

对所有的 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立，且

$$\lambda_1 \mu + \mu_1 \lambda < \lambda_1 \mu_1$$

则问题(1)至少有一个解 $u \in H^1(\Omega)$，其中 λ_1, μ_1 分别是方程(4),(6)的第一个特征值.

显然，定理A中的条件(f'_4)并没有包含下面的情形：

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} \leqslant \lambda_1 \qquad \limsup_{|t|\to\infty} \frac{2G(x,t)}{t^2} \leqslant \mu_1 \tag{3}$$

文献[3]研究的是Neumann-Steklov非共振问题，本文受文献[4-5]共振问题的启发，研究Neumann-Steklov共振问题，据了解，目前还没有这方面的结果. 本文的主要结果是：

定理1 假设条件(f_1)-(f_3)满足，且满足以下条件：

(f_4) 存在正测度集 $D \subset \Omega$，$\alpha \in L^1(\Omega)$，使得当 $|t| \to \infty$ 时，对几乎处处的 $x \in D$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$，都有 $F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 |t|^2 \to -\infty$；对几乎处处的 $x \in \Omega$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$，都有 $F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 |t|^2 \leqslant \alpha(x)$.

(f_5) 存在常数 $L > 0$，$\beta \in L^1(\partial\Omega)$，使得当 $|t| > L$ 时，对几乎处处的 $x \in \partial\Omega$，都有 $G(x,t) \leqslant \beta(x)$.

则问题(1)至少有一个解 $u \in H^1(\Omega)$.

定理2 假设条件(f_1)-(f_3)满足，且满足以下条件：

(f_6) 存在正测度集 $E \subset \partial\Omega$，$\gamma \in L^1(\partial\Omega)$，使得当 $|t| \to \infty$ 时，对几乎处处的 $x \in E$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$，都有 $G(x,t) - \frac{1}{2}\mu_1 |t|^2 \to -\infty$；对几乎处处的 $x \in \partial\Omega$ 以及 $\forall t \in \mathbb{R}$，都有 $G(x,t) - \frac{1}{2}\mu_1 |t|^2 \leqslant \gamma(x)$.

(f_7) 存在常数 $T > 0$，$\rho \in L^1(\Omega)$，使得当 $|t| > T$ 时，对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，有 $F(x,t) \leqslant \rho(x)$.

则问题(1)至少有一个解 $u \in H^1(\Omega)$.

注1 满足条件(f_4),(f_6)和(3)式却不满足条件(f'_4)的函数有很多，比如函数

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\lambda_1 |t|^2 - |t|^{\frac{3}{2}} + a(x)t \qquad G(x,t) = \frac{1}{2}\mu_1 |t|^2 - |t|^{\frac{3}{2}} + b(x)t$$

其中 $a(x), b(x) \in L^\infty(\Omega)$.

由于本文研究的是Neumann-Steklov共振问题，则需要介绍下面的知识：

首先考虑带有Neumann边界条件的线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda u & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

文献[2]得出问题(4)有一列特征值 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots \to \infty\ (j \to \infty)$，且对 $\forall u \in H^1(\Omega)$ 有

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (|\nabla u|^2 + c(x)u^2)\mathrm{d}x \tag{5}$$

文献[6]得出了关于Steklov谱的相关知识. 考虑线性问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \mu u & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

定义 $H^1(\Omega)$ 的内积为

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)\varphi v \mathrm{d}x$$

其对应的范数记为 $\|u\|$，并且当 $n \geqslant 2$ 时，Steklov问题有一列实的特征值 $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \cdots \to \infty$. 对 $\forall u \in H^1(\Omega)$，有

$$\mu_1 \int_{\partial\Omega} u^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant \int_\Omega (|\nabla u|^2 + c(x)u^2)\mathrm{d}x \tag{7}$$

问题(1)对应的能量泛函 $J: H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)u^2 \mathrm{d}x\right] - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G(x,u)\mathrm{d}\sigma \tag{8}$$

由条件(f_1)－(f_3)可得 $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$，且 J 的临界点就是问题(1)的解.

定理 1 的证明　我们断言泛函 J 在 $H^1(\Omega)$ 上是强制的. 否则存在常数 c 和序列$\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$，使得当 $n \to \infty$，$\| u_n \| \to \infty$ 时，$J(u_n) \leqslant c$.

令 $w_n = \dfrac{u_n}{\| u_n \|}$，那么 $\| w_n \| = 1$，从而$\{w_n\}$是有界的，于是存在$\{w_n\}$的子序列(仍记为$\{w_n\}$)，有

$$w_n \rightharpoonup w \in H^1(\Omega) \qquad w_n \to w \in L^p(\Omega)$$

由条件(f_3),(f_5)可推出：存在 $C_1 > 0$，使得对 $\forall t \in \mathbb{R}$，有 $G(x, t) \leqslant \beta(x) + C_1$. 因此

$$\int_{\partial\Omega} G(x, u_n)\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_{\partial\Omega} (\beta(x) + C_1)\mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

由(8),(9)式和条件(f_4)可得

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\| u_n \|^2} \geqslant \frac{J(u_n)}{\| u_n \|^2} = {} & \\
& \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x)w_n^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_\Omega F(x, u_n)\mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_{\partial\Omega} G(x, u_n)\mathrm{d}\sigma \geqslant \\
& \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x)w_n^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_\Omega \left(F(x, u_n) - \frac{1}{2}\lambda_1 u_n^2\right)\mathrm{d}x - \\
& \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega w_n^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_{\partial\Omega} (\beta(x) + C_1)\mathrm{d}\sigma \geqslant \\
& \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x)w_n^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_\Omega \alpha(x)\mathrm{d}x - \\
& \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega w_n^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{\| u_n \|^2}\int_{\partial\Omega} (\beta(x) + C_1)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x) w_n^2)\mathrm{d}x \leqslant \lambda_1 \int_\Omega w^2 \mathrm{d}x$$

由范数的弱下半连续性和(5)式可得

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Omega w^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (|\nabla w|^2 + c(x) w^2)\mathrm{d}x \leqslant & \\
& \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x) w_n^2)\mathrm{d}x \leqslant \\
& \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla w_n|^2 + c(x) w_n^2)\mathrm{d}x \leqslant \lambda_1 \int_\Omega w^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

此不等式其实是等式，这样就有 $w_n \to w \in H^1(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega \lambda_1 |w|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega (|\nabla w|^2 + c(x)w^2)\mathrm{d}x$$

于是 $w = \varphi_1$ 或 $w = -\varphi_1$. 当 $n \to \infty$ 时，有

$$|u_n(x)| = |w_n(x)| \, \| u_n \| \to \infty$$

因此

$$\begin{aligned}
J(u_n) = {} & \frac{1}{2}\| u_n \|^2 - \int_\Omega F(x, u_n)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G(x, u_n)\mathrm{d}\sigma \geqslant \\
& \frac{1}{2}\left(\| u_n \|^2 - \lambda_1 \int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x\right) - \int_D \left(F(x, u_n) - \frac{1}{2}\lambda_1 u_n^2\right)\mathrm{d}x - \int_{\Omega\setminus D} \alpha(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G(x, u_n)\mathrm{d}\sigma \geqslant \\
& -\int_D \left(F(x, u_n) - \frac{1}{2}\lambda_1 u_n^2\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \alpha(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} (\beta(x) + C_1)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant & -\int_D \limsup_{n\to\infty}\left(F(x, u_n) - \frac{1}{2}\lambda_1 u_n^2\right)\mathrm{d}x - \\
& \int_\Omega \alpha(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} (\beta(x) + C_1)\mathrm{d}\sigma \to +\infty
\end{aligned}$$

这与 $J(u_n)\leqslant c$ 矛盾，说明 J 是强制的，由此可推出 J 是下方有界的，即存在 $M\in\mathbb{R}$，使得

$$J(u)\geqslant M \qquad \forall\, u\in H^1(\Omega)$$

为了说明 J 满足(PS)条件，设 $\{u_n\}$ 是(PS)序列，即当 $n\to\infty$ 时，$|J(u_n)|<M$，$J'(u_n)\to 0$，则由 J 的强制性可得 $\{u_n\}$ 是有界的. 由文献[3]的引理4.3可得 J 满足(PS)条件. 根据文献[7]第二章的定理2.7可得 J 有一个临界点 $u\in H^1(\Omega)$. 因此 u 是问题(1)的解.

定理2的证明 我们断言泛函 J 在 $H^1(\Omega)$ 上是强制的. 否则存在常数 c 和序列 $\{u_n\}\in H^1(\Omega)$，使得当 $n\to\infty$，$\|u_n\|\to\infty$ 时，$J(u_n)\leqslant c$.

令 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，那么 $\|v_n\|=1$，从而 $\{v_n\}$ 是有界的，于是存在 $\{v_n\}$ 的子序列(仍记为 $\{v_n\}$)有

$$v_n\rightharpoonup v\in H^1(\Omega) \qquad v_n\to v\in L^q(\partial\Omega)$$

由条件(f_2),(f_6)可推出：存在 $C_2>0$，使得对于 $\forall\, t\in\mathbb{R}$，有 $F(x,t)\leqslant\rho(x)+C_2$. 因此

$$\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega(\rho(x)+C_2)\mathrm{d}x \tag{10}$$

由(8),(10)式和条件(f_6)，得

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{\|u_n\|^2}\geqslant\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2}=\\
&\quad\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\partial\Omega}G(x,u_n)\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant\\
&\quad\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\partial\Omega}\Big(G(x,u_n)-\frac{1}{2}\mu_1u_n^2\Big)\mathrm{d}\sigma-\\
&\quad\frac{1}{2}\mu_1\int_{\partial\Omega}v_n^2\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant\\
&\quad\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\partial\Omega}\gamma(x)\mathrm{d}\sigma-\\
&\quad\frac{1}{2}\mu_1\int_{\partial\Omega}v_n^2\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega(\rho(x)+C_2)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，有

$$\limsup_{|t|\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x\leqslant\mu_1\int_{\partial\Omega}v^2\,\mathrm{d}\sigma$$

由范数的弱下半连续性和(7)式可得

$$\begin{aligned}
\mu_1\int_{\partial\Omega}v^2\mathrm{d}\sigma&\leqslant\int_\Omega(|\nabla v|^2+c(x)v^2)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega(|\nabla v_n|^2+c(x)v_n^2)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\mu_1\int_{\partial\Omega}v^2\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

此不等式其实是等式，这样就有 $v_n\to v\in H^1(\Omega)$，且

$$\int_\Omega(|\nabla v|^2+c(x)\,v^2)\mathrm{d}x=\mu_1\int_{\partial\Omega}v^2\,\mathrm{d}\sigma$$

于是 $v=\psi_1$ 或 $v=-\psi_1$. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$|u_n(x)|=|v_n(x)|\,\|u_n\|\to\infty$$

因此

$$\begin{aligned}
J(u_n)=&\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\int_{\partial\Omega}G(x,u_n)\mathrm{d}\sigma-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant\\
&\frac{1}{2}\Big(\|u_n\|^2-\mu_1\int_{\partial\Omega}u_n^2\mathrm{d}\sigma\Big)-\int_E\Big(G(x,u_n)-\frac{1}{2}\mu_1u_n^2\Big)\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega\setminus E}\gamma(x)\mathrm{d}\sigma-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant
\end{aligned}$$

$$-\int_E (G(x, u_n) - \frac{1}{2}\mu_1 u_n^2)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega (\rho(x) + C_2)\mathrm{d}x$$

由 Fatou 引理得

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant -\int_E \limsup_{n\to\infty}(G(x, u_n) - \frac{1}{2}\mu_1 u_n^2)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \gamma(x)\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega (\rho(x) + C_2)\mathrm{d}x \to +\infty$$

这与 $J(u_n) \leqslant c$ 矛盾，说明 J 是强制的，因此可推出 J 是下方有界的，即存在 $K \in \mathbb{R}$，使得

$$J(u) \geqslant K \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

为了说明 J 满足(PS)条件，设$\{u_n\}$是(PS)序列，即当 $n\to\infty$ 时，$|J(u_n)| < K$，$J'(u_n)\to 0$，由 J 的强制性可得$\{u_n\}$是有界的. 由文献[3]的引理 4.3 可得 J 满足(PS)条件. 根据文献[7]第二章的定理 2.7 可得 J 有一个临界点 $u \in H^1(\Omega)$，因此 u 是问题(1)的解.

参考文献：

[1] SONG Xiu-chao, WANG Wei-hua, ZHAO Pei-hao. Positive Solutions of Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70(1): 328－334.

[2] LĚ A. Eigenvalue Problems for the p-Laplacian [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64(5): 1057－1099.

[3] MAVINGA N, NKASHAMA M N. Steklov-Neumann Eigenproblems and Nonlinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions [J]. J Differential Equations, 2010, 248(5): 1212－1229.

[4] LIU Jia-quan, SU Jia-bao. Remarks on Multiple Nontrivial Solutions for Quasi-Linear Resonant Problems [J]. J Math Anal Appl, 2001, 258(1): 209－222.

[5] TANG Chun-lei. Multiple Solutions of Neumann Problem for Elliptic Equations [J]. Nonlinear Anal, 2003, 54 (4): 637－650.

[6] AUCHMUTY G. Steklov Eigenproblems and the Representation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems [J]. Numer Funct Anal Optim, 2004, 25(3－4): 321－348.

[7] RABINOWITZ P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1986.

On Existence of a Class of Neumann-Steklov Resonant Problem

GUO Miao-miao,　WU Xing-ping,　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Nonlinear second order elliptic partial differential equations with nonlinear boundary conditions have been studied and the existence results have been obtained for a class of Neumann-Steklov resonant problem by variational method.

Key words: resonant problem; variational method; (PS)condition; nonlinear boundary condition

责任编辑　廖　坤