第 38 卷　第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2013 年 12 月
Vol. 38　No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec.　2013

文章编号:1000-5471(2013)12-0028-05

函数向量 Riemann 边值逆问题[①]

王明华

重庆文理学院 数学与财经学院,重庆 永川 402160

摘要:给出了一类全纯函数向量 Riemann 边值逆问题的一般提法. 分齐次和非齐次两种情形,讨论了此边值逆问题正则型情况的可解性. 利用全纯函数向量 Riemann 边值问题的有关理论,获得了该边值逆问题的可解条件和解的表示式.

关　键　词:函数向量;Riemann 边值问题;Riemann 边值逆问题

中图分类号:O175.8　　　**文献标志码**:A

复分析边值问题在物理学和工程技术等实际问题中有着广泛的应用,其研究已较为丰富和成熟. 对于边值问题的逆问题,有较强的力学背景,但其研究还很不充分. 文献[1-4]研究了解析函数的 Riemann 边值逆问题,首先探讨了在力学背景下提出的特殊情形的 Riemann 边值逆问题,然后给出了 Riemann 边值逆问题在数学上的合理提法,并研究了其可解性,最后提出并研究了最一般情形的 Riemann 边值逆问题,并将其应用于奇异积分方程组的求解. 文献[5-6]研究了广义解析函数的特殊和一般情形的 Riemann 边值逆问题. 文献[7-8]分别提出并研究了解析函数的 Riemann-Hilbert 和 Dirichlet 边值逆问题. 文献[9]则将 Riemann 边值逆问题的研究拓展到了无穷直线上. 对于函数组的边值逆问题,由于涉及矩阵运算,而矩阵乘法不满足交换律,其研究要复杂得多. 文献[10]利用函数组 Riemann 边值问题的已有结论,讨论了一类特殊的函数组 Riemann 边值逆问题,给出了问题的解法及其封闭解.

本文给出一类全纯函数组的 Riemann 边值逆问题的一般提法,讨论此边值逆问题正则型情况的可解性,利用全纯函数组 Riemann 边值问题的有关结论,得到该边值逆问题的可解条件和解的表示式. 本文中函数组 Riemann 边值逆问题的提法较文献[10]更为一般化,其对系数函数矩阵和函数组的要求更为宽松,更符合实际问题的要求,是对文献[10]的实质性推广. 另一方面,本文对函数组 Riemann 边值逆问题的解法克服了文献[10]中因矩阵乘法不满足交换律所带来的困难.

1　问题的提法

设 L 为复平面内一光滑闭曲线,取逆时针方向为其正向,记其内域为 D^+,外域为 D^-,且不妨设 $0 \in D^+$.

本文讨论的全纯函数向量 Riemann 边值逆问题简称 $\widetilde{R}$ 问题,即:求一对函数向量 $(\boldsymbol{\Phi}(z), \boldsymbol{\Psi}(t))$,其中

① 收稿日期:2012-08-08
基金项目:重庆市教育委员会科学技术研究基金资助项目(KJ051206).
作者简介:王明华(1964-),男,重庆潼南人,教授,主要从事积分方程与边值问题的研究.

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=(\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \cdots,\ \Phi_n(z))^{\mathrm{T}}$$

为以 L 为跳跃曲线的分区全纯向量，其在 L 上的边值属于 H 类函数向量；

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=(\Psi_1(t),\ \Psi_2(t),\ \cdots,\ \Psi_n(t))^{\mathrm{T}}$$

为 L 上的 H 类函数向量，满足边值条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}_{12}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)+\boldsymbol{g}_1(t)\boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{h}_1(t)\\ \boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}_{22}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)+\boldsymbol{g}_2(t)\boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{h}_2(t)\end{cases}\qquad t\in L \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{jk}(t)(j,k=1,2)$ 为 L 上的 H 类已知 $n\times n$ 阶函数矩阵，$\boldsymbol{g}_j(t)(j=1,2)$ 为 L 上的 H 类已知 $n\times n$ 阶对角函数矩阵，$\boldsymbol{h}_j(t)(j=1,2)$ 为 L 上的 H 类已知 n 维函数列向量.

记

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}_0(t)=\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{g}_2(t)-\boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{g}_1(t)\\ \boldsymbol{G}_1(t)=\boldsymbol{g}_2(t)\boldsymbol{G}_{11}(t)-\boldsymbol{g}_1(t)\boldsymbol{G}_{21}(t)\\ \boldsymbol{G}_2(t)=\boldsymbol{g}_2(t)\boldsymbol{G}_{12}(t)-\boldsymbol{g}_1(t)\boldsymbol{G}_{22}(t)\end{cases} \tag{2}$$

若 $\det\boldsymbol{G}_j(t)\neq 0(j=0,1,2,\ t\in L)$，则称 $\widetilde{R}$ 问题为正则型的，此时称

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}[\log\det([\boldsymbol{G}_1(t)]^{-1}\boldsymbol{G}_2(t))]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg\det([\boldsymbol{G}_1(t)]^{-1}\boldsymbol{G}_2(t))]_L \tag{3}$$

为 $\widetilde{R}$ 问题的指标. 否则，称 $\widetilde{R}$ 问题为非正则型的.

如果要求 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 在∞处至多为 m 阶的，则记 $\widetilde{R}$ 问题为 $\widetilde{R}_m$. 特别地，$\widetilde{R}_{-1}$，$\widetilde{R}_0$ 是两种重要的特殊情形，前者要求 $\boldsymbol{\Phi}(\infty)=\boldsymbol{0}$，后者要求 $\boldsymbol{\Phi}(\infty)$ 有限. 本文只讨论正则型的 $\widetilde{R}_{-1}$ 问题.

2 问题的解法

下面分齐次与非齐次两种情况，分别讨论 $\widetilde{R}$ 问题的可解性.

2.1 齐次 $\widetilde{R}$ 问题

齐次 $\widetilde{R}$ 问题的边值条件为

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}_{12}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)+\boldsymbol{g}_1(t)\boldsymbol{\Psi}(t)\\ \boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}_{22}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)+\boldsymbol{g}_2(t)\boldsymbol{\Psi}(t)\end{cases}\qquad t\in L \tag{4}$$

将(4)式的第一式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{g}_2(t)$，第二式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{g}_1(t)$，然后相减得到

$$\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)\qquad t\in L \tag{5}$$

由于 $\det\boldsymbol{G}_1(t)\neq 0$，将(5)式改写为

$$\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)\qquad t\in L \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t)=[\boldsymbol{G}_1(t)]^{-1}\boldsymbol{G}_2(t) \tag{7}$$

显然 $\boldsymbol{G}(t)$ 为 L 上的 H 类已知 $n\times n$ 阶函数矩阵，且 $\det\boldsymbol{G}(t)\neq 0$，因而问题(6)为正则型的函数向量的齐次 Riemann 边值问题.

由文献[11]可知，问题(6)的总指标为(3)式所给出的 $\widetilde{R}$ 问题的指标 κ，并设问题(6)的偏指标为 κ_1，κ_2，$\cdots$，κ_n，典则解组为 $\boldsymbol{X}_1(z)$，$\boldsymbol{X}_2(z)$，$\cdots$，$\boldsymbol{X}_n(z)$，从而

$$\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_n$$

且

$$\boldsymbol{X}(z)=(\boldsymbol{X}_1(z),\ \boldsymbol{X}_2(z),\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n(z))$$

为问题(6)的典则解矩阵. 分别将上述偏指标、典则解组和典则解矩阵称为 $\widetilde{R}$ 问题的偏指标、典则解组和典

则解矩阵. 记 λ 为 $\widetilde{R}$ 问题的所有正的偏指标之和(当不存在正的偏指标时，取 $\lambda=0$)，记 μ 为 $\widetilde{R}$ 问题的所有负的偏指标之和的相反数(当不存在负的偏指标时，取 $\mu=0$)，因而 $\lambda-\mu=\kappa$.

定理 1　对于正则型齐次 $\widetilde{R}_{-1}$ 问题，当 $\lambda=0$ 时，问题只有零解；当 $\lambda>0$ 时，问题具有一般解 $(\boldsymbol{\Phi}(z), \boldsymbol{\Psi}(t))$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 分别由(8),(9) 式给出. 总之，正则型齐次 $\widetilde{R}_{-1}$ 问题共有 λ 个线性无关解.

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\boldsymbol{X}(z)\boldsymbol{P}(z)=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{X}_j(z)P_j(z) \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{P}(z)=(P_1(z), P_2(z), \cdots, P_n(z))^{\mathrm{T}}$$

$P_j(z)(j=1,2,\cdots,n)$ 为不超过 κ_j-1 次的任意多项式，如果 $\kappa_j-1<0$，则取 $P_j(z)\equiv 0$.

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=[\boldsymbol{G}_0(t)]^{-1}[\boldsymbol{D}_1(t)\boldsymbol{X}^{+}(t)-\boldsymbol{D}_2(t)\boldsymbol{X}^{-}(t)]\boldsymbol{P}(t) \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_1(t)=\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{G}_{21}(t)-\boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{G}_{11}(t)\\ \boldsymbol{D}_2(t)=\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{G}_{22}(t)-\boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{G}_{12}(t)\end{cases} \tag{10}$$

证　据文献[11]，因要求 $\boldsymbol{\Phi}(\infty)=\boldsymbol{0}$，则当 $\lambda=0$ 时，问题(6) 只有零解 $\boldsymbol{\Phi}(z)=\boldsymbol{0}$；当 $\lambda>0$ 时，问题(6) 具有一般解(8). 因而问题(6) 共有 λ 个线性无关解.

将问题(6) 的解 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 代回齐次 $\widetilde{R}$ 问题的边值条件(4) 式，且(4) 式的第一式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{G}_{21}(t)$，第二式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{G}_{11}(t)$，然后相减，注意到(6),(8) 两式，得到齐次 $\widetilde{R}$ 问题中 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 的解，当 $\lambda=0$ 时 $\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{0}$；当 $\lambda>0$ 时 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 具有一般形式(9)，或

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=[\boldsymbol{G}_0(t)]^{-1}[\boldsymbol{D}_1(t)\boldsymbol{G}(t)-\boldsymbol{D}_2(t)]\boldsymbol{X}^{-}(t)\boldsymbol{P}(t) \tag{11}$$

综上所述，定理 1 得证.

2.2　非齐次 $\widetilde{R}$ 问题

对于非齐次 $\widetilde{R}$ 问题的边值条件(1)，沿用齐次 $\widetilde{R}$ 问题中的记法和符号，按照解齐次 $\widetilde{R}$ 问题的方法，得到 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 满足边值条件

$$\boldsymbol{\Phi}^{+}(t)=\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-}(t)+\boldsymbol{h}(t) \qquad t\in L \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{h}(t)=[\boldsymbol{G}_1(t)]^{-1}[\boldsymbol{g}_2(t)\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{g}_1(t)\boldsymbol{h}_2(t)] \tag{13}$$

显然 $\boldsymbol{h}(t)$ 仍为 L 上的 H 类已知 n 维函数列向量，因而问题(12) 为正则型的函数向量的非齐次 Riemann 边值问题.

定理 2　对于正则型非齐次 $\widetilde{R}_{-1}$ 问题：

当 $\mu=0$ 时，若 $\lambda=0$，则问题恒可解，且具有唯一解 $(\boldsymbol{\Phi}_0(z), \boldsymbol{\Psi}_0(t))$，其中 $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_0(t)$ 分别由(14),(15) 式给出；若 $\lambda>0$，则问题仍恒可解，但具有一般解 $(\boldsymbol{\Phi}(z)+\boldsymbol{\Phi}_0(z), \boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{\Psi}_0(t))$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(z)$, $\boldsymbol{\Psi}(t)$, $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$, $\boldsymbol{\Psi}_0(t)$ 分别由(8),(9),(14),(15) 式给出.

当 $\mu>0$ 时，若 $\lambda=0$，则在满足 μ 个线性无关条件(17) 时问题可解，此时，问题具有唯一解 $(\boldsymbol{\Phi}_0(z), \boldsymbol{\Psi}_0(t))$，其中 $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$, $\boldsymbol{\Psi}_0(t)$ 仍分别由(14),(15) 式给出；若 $\lambda>0$，则在满足 μ 个线性无关条件(17) 时问题可解，此时，问题具有一般解 $(\boldsymbol{\Phi}(z)+\boldsymbol{\Phi}_0(z), \boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{\Psi}_0(t))$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(z)$, $\boldsymbol{\Psi}(t)$, $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$, $\boldsymbol{\Psi}_0(t)$ 仍分别由(8),(9),(14),(15) 式给出.

总之，正则型非齐次 $\widetilde{R}_{-1}$ 问题的解具有 λ 个自由度.

$$\boldsymbol{\Phi}_0(z)=\frac{\boldsymbol{X}(z)}{2\pi i}\int_L\frac{[\boldsymbol{X}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{h}(t)}{t-z}\mathrm{d}t \qquad z\notin L \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_0(t)=&\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{G}_0(t)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{D}_1(t)+\boldsymbol{D}_2(t)\left[\boldsymbol{G}(t)\right]^{-1}\right]\boldsymbol{h}(t)+\left[\boldsymbol{G}_0(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}_0(t)+\\&\left[\boldsymbol{G}_0(t)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{D}_1(t)\boldsymbol{G}(t)-\boldsymbol{D}_2(t)\right]\cdot\frac{\boldsymbol{X}^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{\left[\boldsymbol{X}^+(\tau)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{h}_0(t)=\boldsymbol{G}_{21}(t)\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{G}_{11}(t)\boldsymbol{h}_2(t)\tag{16}$$

$$\int_L\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\left[\boldsymbol{X}^+(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{0}\tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}(z)=(Q_1(z),Q_2(z),\cdots,Q_n(z))^{\mathrm{T}}$$

$Q_j(z)(j=1,2,\cdots,n)$ 为不超过 $-\kappa_j-1$ 次的任意多项式，如果 $-\kappa_j-1<0$，则取 $Q_j(z)\equiv 0$.

证 据文献[11]，因要求 $\boldsymbol{\Phi}(\infty)=\boldsymbol{0}$，则当 $\mu=0$ 时，问题(12)恒可解，且具有特殊解 $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$ 形如(14)式；当 $\mu>0$ 时，在 μ 个线形无关条件(17)满足时，问题(12)可解，此时，问题(12)具有特殊解 $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$ 形如(14)式.

将问题(12)的特殊解 $\boldsymbol{\Phi}_0(z)$ 代回非齐次 $\tilde{R}$ 问题的边值条件(1)式，且(1)式的第一式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{G}_{21}(t)$，第二式两端左乘函数矩阵 $\boldsymbol{G}_{11}(t)$，然后相减，从而得到非齐次 $\tilde{R}$ 问题中 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 的特殊解

$$\boldsymbol{\Psi}_0(t)=\left[\boldsymbol{G}_0(t)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{D}_1(t)\boldsymbol{\Phi}_0^+(t)-\boldsymbol{D}_2(t)\boldsymbol{\Phi}_0^-(t)\right]+\left[\boldsymbol{G}_0(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}_0(t)\tag{18}$$

由(14)式，据 Plemelj 边值公式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_0^+(t)=&\boldsymbol{X}^+(t)\left[\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{X}^+(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\left[\boldsymbol{X}^+(\tau)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right]=\\&\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(t)+\frac{\boldsymbol{X}^+(t)}{2\pi i}\int_L\frac{\left[\boldsymbol{X}^+(\tau)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_0^-(t)=&\boldsymbol{X}^-(t)\left[-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{X}^+(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\left[\boldsymbol{X}^+(\tau)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right]=\\&-\frac{1}{2}\boldsymbol{X}^-(t)\left[\boldsymbol{X}^+(t)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(t)+\frac{\boldsymbol{X}^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{\left[\boldsymbol{X}^+(\tau)\right]^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{20}$$

将(19),(20)式代入(18)式，注意到 $\boldsymbol{X}^+(t)=\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{X}^-(t)$，从而得到非齐次 $\tilde{R}$ 问题中 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 的特殊解 $\boldsymbol{\Psi}_0(t)$ 形如(15)式.

综上所述，结合定理1，定理2得证.

注 在 $\tilde{R}$ 问题的边值条件中，若令 $\boldsymbol{G}_{11}(t)=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{G}_{21}(t)=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，则齐次 $\tilde{R}$ 问题为文献[10]所讨论的函数组的 Riemann 边值逆问题. 特别地，本文不要求 $\boldsymbol{G}_{11}(t)$,$\boldsymbol{G}_{21}(t)$ 在 L 上无零点.

参考文献：

[1] IOAKIMIDS N I, PERDIOS E A, PAPADAKIS K E. Numerical Estimation of the Coefficient of the Homogeneous Riemann-Hilbert Problem on the Basis of Boundary Data [J]. Applied Mathematics and Computation, 1991, 41(1): 21-33.

[2] LI Xing. The Inverse Riemann Boundary Value Jump Problem [C] //Proceedings of the International Conference on Computation Engineering Science. Atlanta: Technology Publications, 1992.

[3] 李 星. 一类 Riemann 边值逆问题 [J]. 数学杂志, 1996, 16(3): 303-306.

[4] 王明华. Riemann 边值逆问题与奇异积分方程组 [J]. 数学杂志, 1999, 19(2): 175-180.

[5] 温小琴, 李明忠. 一类广义解析函数的 Riemann 边值逆问题 [J]. 数学杂志, 2004, 24(4): 457-464.

[6] 王明华. 广义解析函数的 Riemann 边值逆问题 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2006, 27(1): 18-20.

[7] 王明华. 一类 Riemann-Hilbert 边值逆问题 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(4): 532-537.

[8] 王明华．一类 Dirichlet 边值逆问题［J］．系统科学与数学，2008，28(2)：225－231．
[9] 王明华．无穷直线上含参变未知函数的 Riemann 边值问题［J］．西南师范大学学报：自然科学版，2003，28(6)：831－834．
[10] 杨晓春．一类正则型函数组 Riemann 边值逆问题［J］．宁夏大学学报：自然科学版，1996，17(1)：5－6．
[11] 路见可．解析函数边值问题［M］．上海：上海科学技术出版社，1987．

On Inverse Riemann Boundary Value Problems of Function Vector

WANG Ming-hua

College of Mathematics and Finance and Economics，Chongqing University of Arts and Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China

Abstract：In this paper，the general mathematical formulation of inverse Riemann boundary value problems of holomorphic function vector has been given，and the solvability of the homogeneous and nonhomogeneous problem for the normal case has been discussed. On the basis of the theory of Riemann boundary value problems of holomorphic function vector，the solvable conditions and the representation of the solutions have been obtained.

Key words：function vector；Riemann boundary value problem；Inverse Riemann boundary value problem

责任编辑　廖　坤