文章编号：1000-5471(2013)12-0024-04

正则 q-树根图的双概率可靠性探究①

刘念祖， 唐晓清， 王汉兴

上海立信会计学院，数学与信息学院，上海 201620

摘要： 首先研究得到了双变量色多项式的一般性的减边公式．接着对根图顶点进行了期望值研究，得出其减边公式，并由此得到一些特殊根图的期望值计算公式．最后讨论了正则 q-树根图和正则 q-树整子根图的期望值计算公式．

关 键 词： 色多项式；根图；减边公式；正则 q-树根图；正则 q-树整子根图

中图分类号： O157.5 **文献标志码：** A

设在一个没有环和复边的简单图 $G=(V,E)$ 里，V 是顶点集，E 是边集．令色的集合 $X=Y\cup Z$，$Y\cap Z=\varnothing$，并且设 $|X|=x$，$|Y|=y$．这样，对于图 G 的恰当染色，存在映射 $\varphi: V\longrightarrow X$，对 V 中任意不同的顶点 u,v，边 $(uv)\in E$，并且对 $\varphi(u)\in Y$，$\varphi(v)\in Y$，有 $\varphi(u)\neq\varphi(v)$．也就是说，相邻的顶点不能染集合 Y 中的同一色，即若相邻的顶点染同色，只有当这个色取自集合 Z．把"染集合 Y 中的色"称为"恰当染色"，而把"染集合 Z 中的色"称为"不恰当染色"，由此得到图 G 的不同的染色数，记为 $P(G;x,y)$．

文献[1]提出如下双变量色多项式计算公式：

$$P(G;x,y)=\sum_{X\subseteq V}(x-y)^{|X|}P(G-X;y) \tag{1}$$

1 双变量色多项式的减边公式

定理 1 对于简单图 $G=(V,E)$，有

$$P(G;x,y)=P(G-e;x,y)-P(G/e;x,y)+(x-y)\cdot P(G-\{u,v\};x,y) \tag{2}$$

其中顶点 $u\in V$，$v\in V$，边 $(uv)=e\in E$．

证 先让图 G 的边 e 的两端顶点 u,v 任意染色，其余部分正常染色，则这样的染色数共有 $P(G-e;x,y)$ 种．但是边 e 的两端顶点 u,v 染同色是不妥的，故要减去此时的染色数 $P(G/e;x,y)$．所减掉的部分中，如果边 e 的两端顶点 u,v 染集合 Z 中的同色，而其余部分正常染色，这是可以的，所以要加上此时的染色数 $(x-y)\cdot P(G-\{u,v\};x,y)$．综上所述，有公式(2)．

定义 1 如果简单图 $G=(V,E)$ 是由一个团 K_q 的各个顶点和另外互不相邻的 $n-q$ 个顶点相连接而成的 q-树，则称之为正则 q-树，记为 T_q^n．

定理 2 有 $n(n\geqslant q+2)$ 个顶点的正则 q-树的双变量色多项式的计算迭代[2]公式为

① 收稿日期：2012-05-21
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60872060)；上海市教委科学基金资助项目(12ZZ193)；上海市自然科学基金资助项目(12ZR1421000)．
作者简介：刘念祖(1955-)，男，上海人，教授，主要从事图论的研究．

$$P(T_q^n;x,y)=(x-q)P(T_q^{n-1};x,y)+q(x-y)P(T_q^{n-2};x,y) \tag{3}$$

证 从团 K_q 外任选一顶点，对这点连团 K_q 每一顶点所得的边反复运用公式(2)即得.

定义 2 对于有 $n(n\geqslant q+1)$ 个顶点的正则 q-树，去掉其恰好含在 $q-1$ 个三角形中的一条边，所得之图称为正则 q-树整子图，记为 I_q^n.

定理 3 有 $n(n\geqslant q+1)$ 个顶点的正则 q-树整子图的色多项式的计算迭代公式为

$$P(I_q^n;x,y)=P(T_q^n;x,y)+P(T_q^{n-1};x,y)-(x-y)\cdot P(T_{q-1}^{n-2};x,y) \tag{4}$$

证 不失一般性，不妨设顶点 $v_i\in K_q(i=1,2,\cdots,q)$；$v_i\notin K_q(i=q+1,\cdots,n)$. 因去掉的边 $e=(v_1v_{q+1})$，则由减边公式(2)，有

$$P(T_q^n;x,y)=P(T_q^n-e;x,y)-P(T_q^n/e;x,y)+(x-y)\cdot P(T_q^n-\{v_1,v_{q+1}\};x,y)$$

整理后即得.

很多网络可以看作是根图，比如供电网络等. 这些网络的终端用户可以看作是根图的顶点，连接顶点的线路可以看作是根图的边，而像电厂等功能中心就是这个根图的根. 根图的可靠性是一个很重要的研究方向. 在灾难后还能正常运行的顶点数的期望值就是根图可靠性的一个重要指标. 文献[3]对根图的边的幸存概率进行了期望值研究，得出了一些结果. 目前，从文献查阅情况来看，国内外还没有人对根图的顶点的幸存概率和失效后的恢复概率的期望值进行研究.

2 根图期望值的定义及减边公式

2.1 简单根图的期望值

设图 G 是一个连通根图，根顶点表示为 $*$，E 是边集，V 是顶点集，子集 $X\subseteq V$. 设图的每一个顶点(根顶点除外)在灾难事件发生后的幸存概率是 p，并且任何两个顶点是否幸存是独立的，而灾难中失效的顶点以独立的概率 q 恢复功能，并设边总是不失效的. 但是，在一个连接根的通路中，如果前面的顶点失效，则后面的顶点是不再考虑计数的(即认为失效了). 本文在概率环境中，研究和根连通的顶点数的期望值.

定义 3 对于根图 G，设每个顶点的幸存概率是 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，且彼此是否幸存是独立的. 设在灾难发生以后，失效顶点重新恢复功能的概率是 $q(0\leqslant q\leqslant 1)$. 那么，灾难后根图 G 还正常运行的期望值是

$$\Pr(G;p,q)=\left|\sum_{X\subset V}p^{|X|}\cdot P(G-X;q)\right| \tag{5}$$

注 1 $P(G,\lambda)$ 是根图 G 除根顶点外其余顶点的染色多项式. 另规定对仅有根顶点的根图，其染色多项式表示为 ϕ_*，令 $P(\phi_*;\lambda)=1$，$|X|$ 表示集合 X 的阶.

当然，这个计算过程一般是比较复杂的. 因此，需要对应的减边公式：

定理 4 对于简单根图 $G=(V,E)$，其期望值为

$$\Pr(G;p,q)=\Pr(G_{-e};p,q)-\Pr(G_{/e};p,q)+p\cdot\Pr(G-\{u,v\};p,q) \tag{6}$$

其中顶点 $u\in V$，$v\in V$，边 $(uv)=e\in E$.

证 由定义 3，有

$$\begin{aligned}
&\Pr(G;p,q)=\\
&(p+q)[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)]-\\
&q\cdot[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)]+\\
&p^2\cdot\Pr(G-\{u,v\};p,q)+\sum_{u,v\notin X,\ X\subseteq V}p^{|X|}P(G-X,q)=\\
&(p+q)[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)]-\\
&(p+q)\cdot[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)-\Pr(G-\{u,v\};p,q)]+\\
&p\cdot[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)]+
\end{aligned}$$

$$p^2 \cdot \Pr(G-\{u,v\};p,q)+\sum_{u,v\notin X,X\subseteq V} p^{|X|}P(G-X,q)=$$

$$\Pr(G_{-e};p,q)-\Pr(G_{/e};p,q)+$$

$$p\cdot[\Pr(G-\{u\};p,q)+\Pr(G-\{v\};p,q)+p\cdot\Pr(G-\{u,v\};p,q)]=$$

$$\Pr(G_{-e};p,q)-\Pr(G_{/e};p,q)+p\cdot\Pr(G-\{u,v\};p,q)$$

2.2　双概率期望值减边公式的应用

由于根图的双概率期望值一般比较复杂，难于计算，故公式(6)有着非常突出的意义.

对有 n 个顶点(不包括根顶点)的圈根图(表示为 C_n)，有

$$\Pr(C_n;p,q)=\Pr(P_n;p,q)-\Pr(C_{n-1};p,q)+p\cdot\Pr(P_{n-2};p,q)$$

对有 n 个顶点(不包括根顶点)的路根图(表示为 P_n)，有

$$\Pr(P_n;p,q)=(p+q)\cdot\Pr(P_{n-1};p,q)-\Pr(P_{n-1};p,q)+p\cdot\Pr(P_{n-2};p,q)=$$

$$(p+q-1)\cdot\Pr(P_{n-1};p,q)+p\cdot\Pr(P_{n-2};p,q)$$

对有 n 个顶点(不包括根顶点)的完全根图(根顶点与完全图的 n 个顶点皆连接，表示为 K_n)，有

$$\Pr(K_n;p,q)=q\cdot\Pr(K_{n-1};p-1,q-1)+p\cdot\Pr(K_{n-1};p,q)$$

对有 m,n 个顶点(不包括根顶点)的完全二部根图(表示为 $K_{m,n}$)，有

$$\Pr(K_{m,n};p,q)=p\cdot\Pr(K_{m-1,n};p,q)+q\cdot\left[\sum_{i=0}^{m-2}C_{m-1}^{i}\Pr(K_{m-1-i,n};p-1,q-1)+(p+q-1)^n\right]$$

对有 n 个顶点(不包括根顶点)的轮根图(表示为 W_n)，有

$$\Pr(W_n;p,q)=q\cdot\Pr(C_{n-1};p-1,q-1)+p\cdot\Pr(C_{n-1};p,q)$$

对有 n 个顶点(不包括根顶点)的扇根图(根顶点与路图的 n 个顶点皆连接，表示为 F_n)，有

$$\Pr(F_n;p,q)=\Pr(W_n;p,q)+\Pr(W_{n-1};p,q)-p\cdot\Pr(F_{n-2};p,q)$$

2.3　正则 h-树根图和正则 h-树整子根图上的期望值

定义 4　如果一个简单根图 $G=(V,E)$ 是由一个根团图[4-7] K_h 的各个顶点和另外互不相邻的 $n-h$ 个顶点相连接而成，则称此图为正则 h-树根图，记为 T_h^n.

定理 5　有 $n(n\geqslant h+2)$ 个顶点的正则 h-树根图的双概率期望值计算公式为

$$\Pr(T_h^n;p,q)=(p+q-h)\cdot\Pr(T_h^{n-1};p,q)+hp\cdot\Pr(T_h^{n-2};p,q) \tag{7}$$

证　反复利用公式(6)可得.

定理 6　有 $n(n\geqslant h)$ 个顶点的正则 h-树根图的双概率期望值的另一种迭代公式为

$$\Pr(T_h^n;p,q)=\sum_{i=0}^{n-h}C_{n-q}^{i}p^{n-h-i}\sum_{j=0}^{i}S(i,j)[q]_j\cdot\Pr(K_h;p-j,q-j) \tag{8}$$

注 2　定理 6 中 $[q]_j=q(q-1)\cdots(q-j+1)$，$[q]_0=1$；$S(i,j)$ 表示第二类 Stirling 数，即有

$$S(i,j)=j\cdot S(i-1,j)+S(i-1,j-1)$$

定义 5　对于有 $n(n\geqslant h+1)$ 个顶点的正则 h-树根图，去掉其恰好含在 $h-1$ 个三角形中的一条边，所得之图称为正则 h-树的整子根图，记为 I_h^n.

定理 7　有 $n(n\geqslant h+1)$ 个顶点的正则 h-树整子根图的双概率期望值公式为

$$\Pr(I_h^n;p,q)=\Pr(T_h^n;p,q)+\Pr(T_h^{n-1};p,q)-p\cdot\Pr(T_{h-1}^{n-2};p,q) \tag{9}$$

证　反复利用公式(6)可得.

参考文献：

［1］　DOHMEN K，PÖNITZ A，TITTMANN P．A New Two-Variable Generalization of the Chromatic Polynomial［J］．Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science，2003(6)：69－89.

［2］　TANG Xiao-qing，WANG Han-xing．Stepwise Confidence Interval Method for Finding Drug's Minimum Effective Dose in Trial [J]. Drug Evaluation Research, 2010, 33(1): 58-62.

[3] BAILY A, GORDON G, PATTON M, et al. Expected Value Expansions in Rooted Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 128: 555-571.

[4] TANG Xiao-qing, BAI Yan-qin, LIU Nian-zu, et al. Markowitz Portfolio Model Based on Random Matrix Theory [J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2013, 19(3): 293-297.

[5] 唐晓清, 刘念祖, 王汉兴, 等. 图的一类新双变量色多项式 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2012, 48(2): 106-112.

[6] 王 微. 图 $P_n \cup Z_{k+2}$ 的同谱等价类 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 37(4): 29-33.

[7] 于艳华, 王文祥, 张昆龙. K-优美图与优美图 G_{k-1} 的优美性研究 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 37(5): 1-5.

On Reliability of Two Probability in Regular Q-Tree Rooted Graph

LIU Nian-zu, TANG Xiao-qing, WANG Han-xing

School of Mathematics and Information, Shanghai Lixin University of Commerce, Shanghai 201620, China

Abstract: We have achieved a general Reduction Edge Formula. Then we have proposed a new vertex expect of rooted graphs, that is, we consider the expected number of vertices in the operational component of rooted graph which contains the root. And we get its Reduction edge formula. With this formula, we have obtained some specific graphs' expected value calculate formulas. Later, we have studied regular rooted q-tree and integral subgraph of regular rooted q-tree.

Key words: chromatic polynomials; rooted graph; Reduction Edge Formula; regular rooted q-tree; integral subgraph of regular rooted q-tree

责任编辑 廖 坤