

文章编号: 1000-5471(2013)12-0019-05

非连通图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_m$  的优美性<sup>①</sup>

吴跃生, 王广富, 徐保根

华东交通大学 基础科学学院, 南昌 330013

摘要: 证明了: 当  $k \geq 1$  时, 非连通图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_m$  是优美图, 其中  $G_m$  是任意一个有  $m$  条边的优美图.

关键词: 优美图; 非连通图; 优美性

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

本文所讨论的图均为无向简单图,  $V(G)$  和  $E(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集和边集. 为了简单起见, 我们把有  $p$  个顶点  $q$  条边的连通图记为  $(p, q)$ -图. 记号  $[m, n]$  表示整数集合  $\{m, m+1, m+2, \dots, n\}$ , 其中  $m$  和  $n$  均为非负整数, 且满足  $0 \leq m < n$ .

图的优美标号问题是组合数学中的一个热门课题<sup>[1-11]</sup>.

**定义 1**<sup>[1]</sup> 对于图  $G = (V, E)$ , 如果存在单射  $\theta: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$ , 使得对所有边  $e = (u, v) \in E(G)$ , 由  $\theta'(e) = |\theta(u) - \theta(v)|$  导出的  $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  是一个双射, 则称  $G$  是优美图,  $\theta$  是  $G$  的一组优美标号, 称  $\theta'$  为  $G$  的边上由  $\theta$  导出的诱导值.

**定义 2**<sup>[1]</sup> 设  $f$  为  $G$  的一个优美标号, 如果存在正整数  $k$ , 使得对任意的  $uv \in E(G)$ , 有  $f(u) > k \geq f(v)$  或  $f(u) \leq k < f(v)$  成立, 则称  $f$  为  $G$  的平衡标号(或称  $G$  有平衡标号  $f$ ), 且称  $k$  为  $f$  的特征. 图  $G$  称为平衡二分图.

显然, 若  $f$  为  $G$  的平衡标号, 则  $k$  是边导出标号为 1 的边的两个顶点中标号较小的顶点的标号.

**定义 3**<sup>[1]</sup> 在平衡二分图  $G$  中, 设其优美标号  $\theta$  的特征为  $k$ , 并且  $\theta(u_0) = k, \theta(v_0) = k+1$ , 则称  $u_0$  为  $G$  的二分点,  $v_0$  为  $G$  的对偶二分点.

**定义 4**<sup>[2]</sup> 设  $G$  是一个优美二部图, 其优美标号为  $\theta$ .  $V(G)$  可划分成两个集合  $X, Y$ , 如果  $\max_{v \in X} \theta(v) < \min_{v \in Y} \theta(v)$ , 则称  $\theta$  是  $G$  的交错标号. 称  $G$  是在交错标号  $\theta$  下的交错图.

事实上, 交错图就是平衡图, 且  $\max_{v \in X} \theta(v) = k$ .

**定义 5**<sup>[1]</sup> 我们把一个圈  $C_{m-1}$  加一条弦的图记为  $C_m^{(a)}$ , 其中  $a$  为圈被弦分出的劣弧长.

**定义 6**<sup>[1]</sup> 称圈  $C_n$  的某个顶点粘接了一条悬挂边所得到的图为图  $C_n \odot K_1$ .

**引理 1** 设

① 收稿日期: 2012-10-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11261019, 11361024); 江西省自然科学基金资助项目(20114BAB201010); 华东交通大学校级科研基金资助项目(11JC05).

作者简介: 吴跃生(1959-), 男, 江西瑞金人, 副教授, 主要从事图论的研究.

$$V(C_{4k} \odot K_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{4k}, x\}$$

$$E(C_{4k} \odot K_1) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{4k-1} v_{4k}, v_{4k} v_1, v_{4k} x\}$$

则图  $C_{4k} \odot K_1$  存在平衡标号  $\theta$ , 使得  $\theta(v_1) = 0, \theta(x) = 2k + 1$ . 图  $C_{4k} \odot K_1$  关于平衡标号  $\theta$  的二分点为  $x$ .

证 定义图  $C_{4k} \odot K_1$  的顶点标号  $\theta$  为

$$\begin{aligned} \theta(v_{2i-1}) &= i - 1 & i &= 1, 2, \dots, k \\ \theta(v_{2i-1}) &= i & i &= k + 1, k + 2, \dots, 2k \\ \theta(v_{2i}) &= 4k - i + 2 & i &= 1, 2, \dots, 2k \\ \theta(x) &= 2k + 1 \end{aligned}$$

容易验证上面定义的标号  $\theta$  是图  $C_{4k} \odot K_1$  的优美标号. 令

$$X = \{x, v_{2i-1}; i = 1, 2, \dots, 2k\} \quad Y = \{v_{2i}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

$$\max_{v \in X} \theta(v) = 2k + 1 = \theta(x) < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2k + 2$$

所以标号  $\theta$  是图  $C_{4k} \odot K_1$  的平衡标号, 且图  $C_{4k} \odot K_1$  关于平衡标号  $\theta$  的二分点为  $x$ .

引理 2 设

$$V(C_{4k} \odot K_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{4k}, x\}$$

$$E(C_{4k} \odot K_1) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{4k-1} v_{4k}, v_{4k} v_1, v_{4k} x\}$$

则图  $C_{4k} \odot K_1$  存在平衡标号  $\theta$ , 使得  $\theta(v_1) = 0, \theta(x) = 2k$ , 图  $C_{4k} \odot K_1$  关于平衡标号  $\theta$  的二分点为  $x$ .

证 定义图  $C_{4k} \odot K_1$  的顶点标号  $\theta$  为

$$\begin{aligned} \theta(v_{2i-1}) &= i - 1 & i &= 1, 2, \dots, 2k \\ \theta(v_{2i}) &= 4k - i + 2 & i &= 1, 2, \dots, k \\ \theta(v_{2i}) &= 4k - i + 1 & i &= k + 1, k + 2, \dots, 2k \\ \theta(x) &= 2k \end{aligned}$$

容易验证上面定义的标号  $\theta$  是图  $C_{4k} \odot K_1$  的优美标号. 令

$$X = \{x, v_{2i-1}; i = 1, 2, \dots, 2k\} \quad Y = \{v_{2i}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

$$\max_{v \in X} \theta(v) = 2k = \theta(x) < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2k + 1$$

所以标号  $\theta$  是图  $C_{4k} \odot K_1$  的平衡标号, 且图  $C_{4k} \odot K_1$  关于平衡标号  $\theta$  的二分点为  $x$ .

例 1 图  $C_{12} \odot K_1$  的特征分别为 7 和 6 的平衡标号如图 1、图 2 所示.

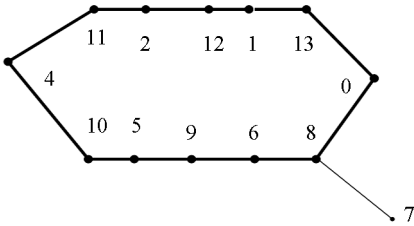


图 1 图  $C_{12} \odot K_1$  的特征为 7 的平衡标号

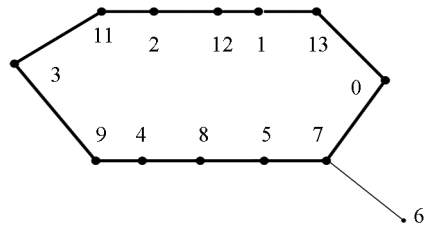


图 2 图  $C_{12} \odot K_1$  的特征为 6 的平衡标号

定理 1 当  $k \geq 1$  时,  $G_{2k}$  是边数为  $2k$  的优美图, 则非连通图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}$  是优美的.

证 因为  $V(C_{4k+2}^{(2)}) = V(C_{4k} \odot K_1)$ , 设  $\theta$  就是引理 1 中定义的图  $C_{4k} \odot K_1$  的平衡标号,

$$V(C_{4k} \odot K_1) = X \cup Y$$

$$X = \{x, v_{2i-1}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

$$Y = \{v_{2i}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

且

$$\max_{v \in X} \theta(v) = 2k + 1 = \theta(x) < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2k + 2$$

$\theta(v_1) = 0, \theta(x) = 2k + 1$ . 设  $f$  是图  $G_{2k}$  的优美标号. 定义图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}$  的顶点标号  $\theta_1$  为:

$$\theta_1(u) = \begin{cases} \theta(u) & u \in X \\ \theta(u) + 2k + 1 & u \in Y \\ f(u) + 2k + 2 & u \in G_{2k} \end{cases}$$

下面证明标号  $\theta$  是图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}$  的优美标号.

易知  $\theta: X \rightarrow [0, 2k + 1]$  是单(或双)射,  $\theta: Y \rightarrow [4k + 3, 6k + 2]$  是单(或双)射,  $\theta: V(G_{2k}) \rightarrow [2k + 2, 4k + 2]$  是单(或双)射, 且

$$\theta(u) < \theta(u) < \theta(u)$$

$u \in X$      $u \in V(G_{2k})$      $u \in Y$

$$V(C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}) = V(C_{4k+2}^{(2)}) \cup V(G_{2k}) \rightarrow [0, 6k + 2]$$

是一个单(或双)射.

由点标号  $\theta$  导出的边标号  $\theta'$  为:

$$\begin{aligned} \{\theta'(e): e \in E(C_{4k+2}^{(2)})\} &= \{\theta'(e): e \in E(C_{4k} \odot K_1)\} \cup \{\theta'(xv_1)\} = \\ &[2k + 2, 6k + 2] \cup \{2k + 1\} = [2k + 1, 6k + 2] \\ \{\theta'(e): e \in E(G_{2k})\} &= [1, 2k] \end{aligned}$$

当  $k \geq 1$  时,  $\theta': E(C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}) \rightarrow [1, 6k + 2]$  是一个双射.

综上所述,  $\theta$  是图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k}$  的优美标号.

**定理 2** 当  $k \geq 1$  时,  $G_{2k-1}$  是边数为  $2k - 1$  的优美图, 则非连通图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}$  是优美的.

**证** 因为  $V(C_{4k+2}^{(2)}) = V(C_{4k} \odot K_1)$ , 设  $\theta$  就是引理 2 中定义的图  $C_{4k} \odot K_1$  的平衡标号,

$$V(C_{4k} \odot K_1) = X \cup Y$$

$$X = \{x, v_{2i-1}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

$$Y = \{v_{2i}; i = 1, 2, \dots, 2k\}$$

且

$$\max_{v \in X} \theta(v) = 2k = \theta(x) < \min_{v \in Y} \theta(v) = 2k + 1$$

$\theta(v_1) = 0, \theta(x) = 2k$ . 设  $f$  是图  $G_{2k-1}$  的优美标号. 定义图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}$  的顶点标号  $\theta_1$  为:

$$\theta_1(u) = \begin{cases} \theta(u) & u \in X \\ \theta(u) + 2k & u \in Y \\ f(u) + 2k + 1 & u \in G_{2k-1} \end{cases}$$

下面证明标号  $\theta$  是图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}$  的优美标号.

易知  $\theta: X \rightarrow [0, 2k]$  是单(或双)射,  $\theta: Y \rightarrow [4k + 1, 6k + 2]$  是单(或双)射,  $\theta: V(G_{2k}) \rightarrow [2k + 1, 4k]$  是单(或双)射, 且

$$\theta(u) < \theta(u) < \theta(u)$$

$u \in X$      $u \in V(G_{2k-1})$      $u \in Y$

$$V(C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}) = V(C_{4k+2}^{(2)}) \cup V(G_{2k-1}) \rightarrow [0, 6k + 1]$$

是一个单(或双)射.

由点标号  $\theta$  导出的边标号  $\theta'$  为:

$$\begin{aligned} \{\theta'(e): e \in E(C_{4k+2}^{(2)})\} &= \{\theta'(e): e \in E(C_{4k} \odot K_1)\} \cup \{\theta'(xv_1)\} = \\ &[2k + 1, 6k + 1] \cup \{2k\} = [2k + 1, 6k + 1] \\ \{\theta'(e): e \in E(G_{2k})\} &= [1, 2k - 1] \end{aligned}$$

当  $k \geq 1$  时,  $\theta': E(C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}) \rightarrow [1, 6k+1]$  是一个双射.

综上所述,  $\theta$  是图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_{2k-1}$  的优美标号.

在定理 1、定理 2 中, 令  $G_m = St(m)$ , 其中  $St(m)$  表示有  $m+1$  个顶点或有  $m$  条边的星形树, 则有:

**推论 1** 当  $k \geq 2$  时,  $C_{4k+2}^{(2)} \cup St(m)$  是优美图.

在定理 1、定理 2 中, 令  $G_m = P_{m+1}$ , 其中  $P_{m+1}$  表示有  $m+1$  个顶点或有  $m$  条边的路, 则有:

**推论 2** 当  $k \geq 2$  时,  $C_{4k+2}^{(2)} \cup P_{m+1}$  是优美图.

在定理 1、定理 2 中, 令  $G_m = T_{m+1}$ , 其中  $T_{m+1}$  表示有  $m+1$  个顶点或有  $m$  条边的优美树, 则有:

**推论 3** 当  $k \geq 2$  时,  $C_{4k+2}^{(2)} \cup T_m$  是优美图.

在定理 1 中, 令  $G_{2l} = C_{2l}$ ,  $l=2k$ , 则有:

**推论 4** 当  $k \geq 1$  时,  $C_{8k+2}^{(2)} \cup C_{4k}$  是优美图.

在定理 1 中, 令  $G_{2k} = C_{2k-1} \odot K_1$ , 当  $k \geq 2$  时,  $C_{2k-1} \odot K_1$  是优美图, 所以有

**推论 5** 当  $k \geq 2$  时,  $C_{4k+2}^{(2)} \cup C_{2k-1} \odot K_1$  是优美图.

在定理 2 中, 令  $G_{2l-1} = C_{2l-1}$ ,  $l=2k$ , 则有:

**推论 6** 当  $k \geq 1$  时,  $C_{8k+2}^{(2)} \cup C_{4k-1}$  是优美图.

在定理 2 中, 令  $G_{2k-1} = C_{2k-2} \odot K_1$ , 当  $k \geq 3$  时,  $C_{2k-1} \odot K_1$  是优美图, 所以有:

**推论 7** 当  $k \geq 3$  时,  $C_{4k+2}^{(2)} \cup C_{2k-2} \odot K_1$  是优美图.

**例 2**  $C_{14}^{(2)} \cup St(6)$ ,  $C_{14}^{(2)} \cup P_7$  和  $C_{10}^{(2)} \cup C_4$  的优美标号如图 3, 4, 5 所示,  $C_{14}^{(2)} \cup C_5 \odot K_1$  的优美标号如图 6 所示.

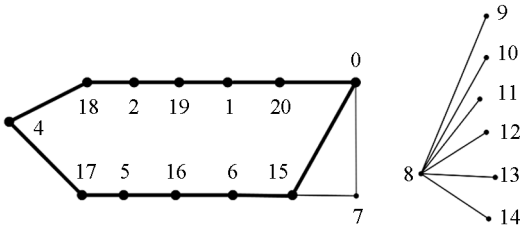


图 3 图  $C_{14}^{(2)} \cup St(6)$  的优美标号

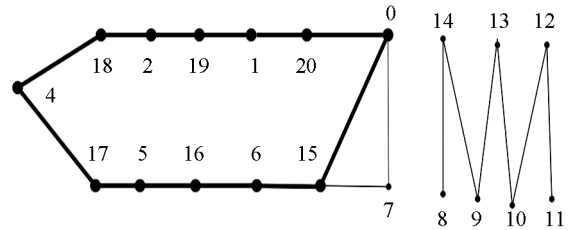


图 4 图  $C_{14}^{(2)} \cup P_7$  的优美标号

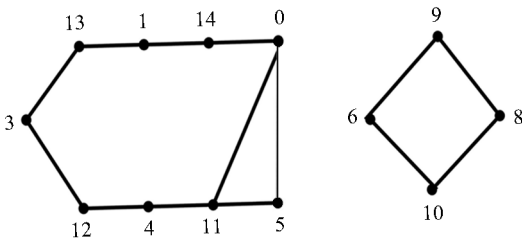


图 5 图  $C_{10}^{(2)} \cup C_4$  的优美标号

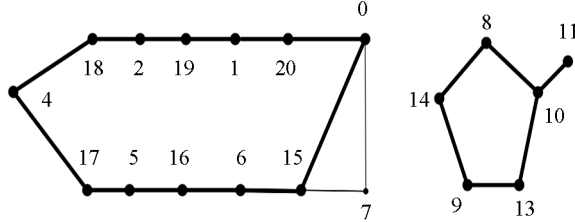


图 6 图  $C_{14}^{(2)} \cup C_5 \odot K_1$  的优美标号

参考文献:

[1] 马克杰. 优美图 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

[2] 杨显文. 关于  $C_m$  蛇的优美性 [J]. 工程数学学报, 1995, 12(4): 108-112.

[3] 吴跃生. 关于圈  $C_{4h}$  的  $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性 [J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77-80.

[4] 吴跃生, 李咏秋. 关于圈  $C_{4h+3}$  的  $(r_1, r_2, \dots, r_{4h+3})$ -冠的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2011, 32(6): 1-4.

[5] 吴跃生. 关于图  $P_{6k+5}^3 \cup P_n^2$  的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 4-7.

- [6] 吴跃生, 徐保根. 两类非连通图  $(P_2 \vee \overline{K_n})(0, 0, r_1, 0, \dots, 0, r_n) \cup St(m)$  及  $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1, r_2, 0, \dots, 0) \cup T_n$  的优美性 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(5): 16–19.
- [7] 吴跃生. 图  $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$  的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(5): 9–11.
- [8] 吴跃生. 关于圈  $C_{4k+3}$  的  $(Gr_1, Gr_2, \dots, Gr_{4k+3})$ -冠的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2013, 34(4): 1–6.
- [9] 吴跃生, 王广富. 非连通图  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_m$  的优美性 [J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2013, 36(8): 1010–1012.
- [10] 于艳华, 王文祥, 张昆龙.  $k$ -优美图与优美图  $G_{k-1}$  的优美性研究 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 37(5): 1–5.
- [11] 王 涛, 王 清, 李德明. 几类与圈有关图的优美性 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(8): 83–87.

## On Gracefulness of Unconnected Graph $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_m$

WU Yue-sheng, WANG Guang-fu, XU Bao-gen

*School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China*

**Abstract:** The paper proves if  $k \geq 1$ , then unconnected graph  $C_{4k+2}^{(2)} \cup G_m$  is a graceful graph, where  $G_m$  is a graceful graph with  $m$  edges.

**Key words:** graceful graph; unconnected graph; gracefulness

责任编辑 廖 坤

