文章编号:1000-5471(2013)12-0013-06

$\mathscr{R}_m^A$ 上的 Gorenstein 投射模①

罗秀花

上海交通大学 理学院数学系,上海 200240

摘要:研究了一类有限维上三角矩阵代数的 Gorenstein 性质,刻画了其上的 Gorenstein 投射模.

关 键 词:Gorenstein 投射模;Gorenstein 代数;上三角矩阵代数

中图分类号:O154.2 **文献标志码**:A

本文中的 k 均为域,所有的代数 A 均是有限维 k-代数,所有的模均为有限生成模,A-mod 是指左 A-模范畴. 设 M 是 A-模,如果存在投射 A-模正合列:

$$(P^{\cdot}, d^{\cdot}) = \cdots \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} P_1 \longrightarrow \cdots$$

且 $\mathrm{Hom}(P^{\cdot}, A)$ 也正合,使得 $M \cong \mathrm{Ker}\, d_0$,则称 M 为 Gorenstein 投射模[1]. 这类模在许多代数分支中都起着重要作用,如 Gorenstein 同调代数和代数的表示理论[2-3],代数的 Tate 上同调以及导出范畴和奇点理论[4-5].

如果 $\mathrm{inj.dim}\,{}_AA < \infty$ 且 $\mathrm{inj.dim}\,A_A < \infty$,则称 A 为 Gorenstein 代数,很多重要的代数都是 Gorenstein 代数,如有限群的群代数、有限维 Hopf 代数、自入射代数、整体维数有限的代数以及丛倾斜代数等. 对于 Gorenstein 代数而言,Gorenstein 投射模尤为重要[3,6]. Gorenstein 投射模的构造是一个基本的问题[2,7-8],但至今仍没有得到充分解决. 本文主要研究一类上三角矩阵代数 $\mathscr{R}_m^A$ 的 Gorenstein 性质以及模范畴 $\mathscr{R}_m^A$-mod,并给出所有 Gorenstein 投射 $\mathscr{R}_m^A$-模的具体刻画.

给定 A-B-双模 M,我们考虑代数

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_A & M_B \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

其上的加法和乘法就是矩阵的加法和乘法. 这种扩张的优点在于 Λ-模可以看作一个三元组 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\phi}$,在不至于混淆的情况下简记为 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,其中 $X \in A$-mod,$Y \in B$-mod,ϕ: $M \otimes_B Y \longrightarrow X$ 是 A-模态射. Λ-模态射 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\phi} \longrightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}_{\phi'}$ 等同于态射对 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$,其中 $f \in \mathrm{Hom}_A(X, X')$,$g \in \mathrm{Hom}_B(Y, Y')$,并使得态射

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_B Y & \xrightarrow{\phi} & X \\ \mathrm{id} \otimes g \downarrow & & f \downarrow \\ M \otimes_B Y' & \xrightarrow{\phi'} & X' \end{array}$$

交换[9].

① 收稿日期:2012-05-17
作者简介:罗秀花(1985-),女,安徽亳州人,讲师,主要从事同调代数的研究.

1 $\mathscr{R}_m^A$ 的模范畴

本节主要给出范畴 $\mathscr{R}_m^A$-mod 的具体描述. 令 k 是域，$D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$，A 是有限维 k-代数. 设整数 $m\geqslant 1$，$\mathscr{R}_m^A$ 是上三角矩阵代数 $\begin{pmatrix} A & DA & & & \\ & A & DA & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A & DA \\ & & & & A \end{pmatrix}_{m\times m}$，其上乘法由典范态射 $DA\otimes_A A\longrightarrow DA$，$A\otimes_A DA\longrightarrow DA$ 和零态射 $DA\otimes_A DA\longrightarrow 0$ 给出. 显然，$\mathscr{R}_m^A$ 是重复代数[10]的有限维子代数，而且 $\mathscr{R}_m^A=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{m-1}^A & M\\ 0 & A\end{pmatrix}$，其中 $M=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ DA\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}A\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$是内射左 $\mathscr{R}_{m-1}^A$-模和内射右 A-模.

为了描述 $\mathscr{R}_m^A$-mod，我们先给出范畴 $\mathscr{R}_m^A$-rep 的描述：其对象形如$\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{m-1}\\ X_m\end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-1})}$，对任意的 i，$X_i\in A$-mod，$\phi_i: DA\otimes_A X_{i+1}\longrightarrow X_i$ 是 A-模态射，并且当 $1\leqslant i\leqslant m-2$ 时，$\phi_i(\mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{i+1})=0$. 记态射

$$\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{m-1}\\ X_m\end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-2},\phi_{m-1})}\longrightarrow\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_{m-1}\\ Y_m\end{pmatrix}_{(\varphi_1,\cdots,\varphi_{m-2},\varphi_{m-1})}$$

为$\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_{m-1}\\ f_m\end{pmatrix}$，其中对任意 i，$f_i: X_i\longrightarrow Y_i$ 是 A-模态射，使得态射

$$\begin{array}{ccc} DA\otimes X_i & \xrightarrow{\phi_{i-1}} & X_{i-1}\\ \mathrm{id}_{DA}\otimes f_i\downarrow & & f_{i-1}\downarrow\\ DA\otimes Y_i & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & Y_{i-1}\end{array}$$

交换.

定理 1 (i) 存在范畴等价 $\mathscr{R}_m^A$-mod $\cong\mathscr{R}_m^A$-rep. 此外，内射左 $\mathscr{R}_m^A$-模是下列模有限直和的直和项：

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ I_1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ I_2\\ \mathrm{Hom}_A(DA,I_2)\end{pmatrix}\quad\cdots\quad\begin{pmatrix}I_m\\ \mathrm{Hom}_A(DA,I_m)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

其中所有的 I_i 都是内射左A-模，态射 $DA\otimes_A\mathrm{Hom}_A(DA,I_i)\longrightarrow I_i$ 是赋值态射. 内射右 $\mathscr{R}_m^A$-模是下列模有限直和的直和项：

$(J_1,0,\cdots,0,0)\quad(\mathrm{Hom}_A(DA,J_2),J_2,0,\cdots,0)\quad\cdots\quad(0,\cdots,0,\mathrm{Hom}_A(DA,J_m),J_m)$

其中所有的 J_i 都是内射右 A -模，态射 $DA\otimes_A \mathrm{Hom}_A(DA, J_i)\longrightarrow J_i$ 是赋值态射.

(ii) $\mathscr{R}_m^A$ 是 Gorenstein 代数当且仅当 A 是 Gorenstein 代数.

证　(i) 把 $\mathscr{R}_m^A$ 改写成 $\mathscr{R}_m^A=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{m-1}^A & M\\ 0 & A\end{pmatrix}$. 那么 $\mathscr{R}_m^A$ -模可写成 $\begin{pmatrix}X'\\ X_m\end{pmatrix}_\phi$ 的形式，其中 $X'\in\mathscr{R}_{m-1}^A$-mod，$X_m\in A$-mod，$\phi: M\otimes_A X_m\longrightarrow X'$ 是 $\mathscr{R}_{m-1}^A$ -模态射.

首先，我们用归纳法证明：

$$\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{mod}\cong\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{rep}$$

如果 $m=1$，那么由两者的结构可知

$$\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{mod}\cong A\text{-}\mathrm{mod}$$

和

$$\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{rep}\cong A\text{-}\mathrm{mod}$$

故当 $m=1$ 时成立. 假设命题对 $m-1$ 成立，下证命题对 m 也成立. 此时 $X'\in\mathscr{R}_{m-1}^A$-mod 且 $\phi: M\otimes_A X_m\longrightarrow X'$ 是 $\mathscr{R}_{m-1}^A$ -模态射. 由归纳假设知 $X'=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_{m-2}\\ X_{m-1}\end{pmatrix}_{(\phi_i,\ 1\leqslant i\leqslant m-2)}$，其中当 $1\leqslant i\leqslant m-1$ 时，$X_i\in A$-mod；当 $1\leqslant i\leqslant m-2$ 时，$\phi_i: DA\otimes X_{i+1}\longrightarrow X_i$ 是 A -模态射；当 $1\leqslant i\leqslant m-3$ 时，$\phi_i(\mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{i+1})=0$. 由 $M=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ DA\end{pmatrix}$ 知 $M\otimes_A X_m=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ DA\otimes_A X_m\end{pmatrix}$，故由归纳假设知，$\phi=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \phi_{m-1}\end{pmatrix}$ 是 $\mathscr{R}_{m-1}^A$ -模态射，且在 $\mathscr{R}_{m-1}^A$-mod 中有态射交换

$$\begin{array}{ccc}DA\otimes DA\otimes X_m & \longrightarrow & 0\\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{m-1}}\downarrow & & \downarrow\\ DA\otimes X_{m-1} & \xrightarrow{\phi_{m-2}} & X_{m-2}\end{array}$$

即

$$\phi_{m-2}(\mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{m-1})=0$$

到目前，我们就证明了

$$\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{mod}\cong\mathscr{R}_m^A\text{-}\mathrm{rep}$$

由于 $\mathscr{R}_m^A$ 是有限维代数，故其内射模的结构如定理 1 所述.

(ii) 对 m 进行归纳. 当 $m=1$ 时，我们有代数同构 $\mathscr{R}_1^A\cong A$，故此时命题成立. 假设命题对 $m-1$ 成立，我们要证明命题对 m 仍成立. 令 $M=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ DA\end{pmatrix}$. 那么 M 自然地有 $\mathscr{R}_{m-1}^A-A$ -双模结构，使得 $\mathscr{R}_m^A=\begin{pmatrix}\mathscr{R}_{m-1}^A & M\\ 0 & A\end{pmatrix}$. 由归纳假设知，如果 A 是 Gorenstein 代数，那么 $\mathscr{R}_{m-1}^A$ 是 Gorenstein 代数. 由 M 是内射 $\mathscr{R}_{m-1}^A$ -模知

$$\mathrm{proj.\,dim}_{\mathscr{R}_{m-1}^A} M<\infty$$

由 A 是 Gorenstein 代数知，$\mathrm{inj.\,dim}\ {}_AA<\infty$，从而 $\mathrm{proj.\,dim}\,(DA)_A<\infty$. 由 $M_A\cong(DA)_A$ 知

$$\mathrm{proj.\,dim}\,M_A<\infty$$

由文献[5]中定理3.3知 $\mathscr{R}_m^A$ 是Gorenstein代数.

如果 $\mathscr{R}_m^A$ 是Gorenstein代数，则 $\text{inj.dim}\,(0,\cdots,0,A)_{\mathscr{R}_m^A}<\infty$ 且 $\text{inj.dim}_{\mathscr{R}_m^A}\begin{pmatrix}A\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}<\infty$. 故由定理1(i)知 $\text{inj.dim}\,{}_AA<\infty$ 且 $\text{inj.dim}\,A_A<\infty$，即 A 是Gorenstein代数.

2　$\mathscr{R}_m^A$ 上的Gorenstein投射模

本节将给出 $\mathscr{R}_m^A$ 上Gorenstein投射模的详细刻画. 为此，我们把 $\mathscr{R}_m^A$-模写成 $\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_{m-1}\\X_m\end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-1})}$ 的形式，其中对任意的 i，$X_i\in A\text{-mod}$，ϕ_i：$DA\otimes_A X_{i+1}\longrightarrow X_i$ 是 A-模态射，并且当 $1\leqslant i\leqslant m-2$ 时，

$$\phi_i(\mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{i+1})=0$$

把 X 写成 $X=\begin{pmatrix}X'\\X_m\end{pmatrix}_\phi$ 的形式，其中 ϕ：$M\otimes_A X_m\longrightarrow X'$，$X'=\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_{m-1}\end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-2})}$. 由

$$M\otimes_A X_m=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\DA\otimes_A X_m\end{pmatrix}\qquad \phi=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\phi_{m-1}\end{pmatrix}$$

知 $\text{Coker}\,\phi=\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_{m-2}\\\text{Coker}\phi_{m-1}\end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-3},f_{m-2})}$，其中 f_{m-2} 由如下态射交换给出：

$$\begin{tikzcd}
DA\otimes_A(DA\otimes_A X_m) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{DA}\otimes\phi_{m-1}"'] & 0 \arrow[d] \\
DA\otimes_A X_{m-1} \arrow[r, "\phi_{m-2}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{DA}\otimes\tilde{\phi}_{m-1}"'] & X_{m-1} \arrow[d, "="'] \\
DA\otimes_A\text{Coker}\,\phi_{m-1} \arrow[r, "f_{m-2}"] & X_{m-2}
\end{tikzcd}$$

其中 $\tilde{\phi}_{m-1}$：$X_{m-1}\longrightarrow\text{Coker}\,\phi_{m-1}$ 是典范同态. 由图1的交换性以及 $\mathrm{id}_{DA}\otimes\tilde{\phi}_{m-1}$ 是满射知

$$\text{Im}\,f_{m-2}=\text{Im}\,\phi_{m-2}\qquad\text{Coker}\,f_{m-2}=\text{Coker}\,\phi_{m-2}$$

引理1　f_{m-2} 是单射当且仅当 $\text{Ker}\,\phi_{m-2}=DA\otimes_A\text{Im}\,\phi_{m-1}$.

证　由图1的交换性和 $DA\otimes_A$-的右正合性可得如下态射交换：

$$\begin{tikzcd}
 & DA\otimes_A\text{Im}\,\phi_{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & DA\otimes_A X_{m-1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{DA}\otimes\tilde{\phi}_{m-1}"] \arrow[d, "\phi_{m-2}"'] & DA\otimes_A\text{Coker}\,\phi_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m-2}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X_{m-2} \arrow[r, "="] & X_{m-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据蛇引理，

$$DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \phi_{m-2} \longrightarrow \mathrm{Ker}\ f_{m-2} \longrightarrow 0$$

是正合列．故 f_{m-2} 是单射当且仅当 $DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \phi_{m-2}$ 是满射．因为 $\phi_{m-2}(\mathrm{id}_{DA} \otimes \phi_{m-1}) = 0$，所以 $DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-1} \subseteq \mathrm{Ker}\ \phi_{m-2}$．于是有 $DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-1} = \mathrm{Ker}\ \phi_{m-2}$．

定理 2　设 $\mathscr{R}_m^A$ 是 Gorenstein 代数，则 $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-1})}$ 是 Gorenstein 投射 $\mathscr{R}_m^A$-模当且仅当下列条件成立：

(1°) ϕ_{m-1} 是单射；

(2°) X_m 和 $\mathrm{Coker}\ \phi_i (1 \leqslant i \leqslant m-1)$ 均为 Gorenstein 投射 A-模；

(3°) 对任意的 $i = 1, 2, \cdots, m-2$，$\mathrm{Ker}\ \phi_i = DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{i+1}$．

证　对 m 进行归纳．若 $m=1$，那么 $\mathscr{R}_1^A \cong A$，结论自然成立．

给定 $\mathscr{R}_m^A$-模 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-1})}$．为了应用文献[11]中的定理 3.2，把 X 写成 $X = \begin{pmatrix} X' \\ X_m \end{pmatrix}_{\phi}$，其中 $X' = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{m-2} \\ X_{m-1} \end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-2})} \in \mathscr{R}_{m-1}^A$-mod．由文献[11]中定理 3.2 知，$X$ 是 Gorenstein 投射模当且仅当 ϕ 是单射，X_m 是 Gorenstein 投射 A-模，$\mathrm{Coker}\ \phi$ 是 Gorenstein 投射 $\mathscr{R}_{m-1}^A$-模．由 $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_{m-1} \end{pmatrix}$ 知，ϕ 是单射当且仅当 ϕ_{m-1} 是单射．

由归纳假设知

$$\mathrm{Coker}\ \phi = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{m-2} \\ \mathrm{Coker}\ \phi_{m-1} \end{pmatrix}_{(\phi_1,\cdots,\phi_{m-3},f_{m-2})}$$

是 Gorenstein 投射 $\mathscr{R}_{m-1}^A$-模当且仅当 f_{m-2} 是单射；$\mathrm{Coker}\ \phi_i (i = 1, 2, \cdots, m-1)$ 和 $\mathrm{Coker}\ f_{m-2}$ 是 Gorenstein 投射 A-模；$\mathrm{Ker}\ \phi_i = DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, m-4)$，且 $\mathrm{Ker}\ \phi_{m-3} = DA \otimes_A \mathrm{Im}\ f_{m-2}$．由图 1 得 $\mathrm{Im}\ f_{m-2} = \mathrm{Im}\ \phi_{m-2}$，故 $\mathrm{Ker}\ \phi_{m-3} = DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-2}$．由引理 1 知，$f_{m-2}$ 是单射当且仅当 $\mathrm{Ker}\ \phi_{m-2} = DA \otimes_A \mathrm{Im}\ \phi_{m-1}$．

参考文献：

[1]　ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Math Z, 1995, 220(4): 611－633.

[2]　LI Zhi-wei, ZHANG Pu. Gorenstein Algebras of Finite Cohen-Macaulay Type [J]. Adv Math, 2010, 223: 728－734.

[3]　ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. New York: De Gruyter Expositions in Mathemat-

ics, 2000: 239－253.

[4] GAO Nan, ZHANG Pu. Gorenstein Derived Categories [J]. J Algebra, 2010, 323: 2041－2057.

[5] CHEN Xiao-wu. Singularity Categories, Schur Functors and Triangular Matrix Rings [J]. Algebr Represent Theory, 2009(12): 181－191.

[6] BUCHWEITZ R O, GREUEL G M, SCHREYER F O. Cohen-Macaulay Modules on Hypersurface Singularities II [J]. Invent Math, 1987, 88(1): 165－182.

[7] LI Zhi-wei, ZHANG Pu. A Construction of Gorenstein-Projective Modules [J]. J Algebra, 2010, 323: 802－812.

[8] LUO Xiu-hua, ZHANG Pu. Gorenstein-Projective Modules Over $T_{m,n}(A)$ [J]. Chin Ann Math, 2011, 32B(2): 201－208.

[9] AUSLANDER M, REITEN I, SMAL S O. Representation Theory of Artin Algebras [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995: 70－79.

[10] HAPPEL D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1988: 59－69.

[11] XIONG Bao-lin, ZHANG Pu. Gorenstein-Projective Modules Over Triangular Matrix Artin Algebras [J]. J Algebra and Its Applications, 2012, 11(4): 1250066.

On Gorenstein-Projective Modules Over $\mathscr{R}_m^A$

LUO Xiu-hua

Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China

Abstract: The Gorensteinness of a class of upper triangular matrix algebras $\mathscr{R}_m^A$ has been studied, and all Gorenstein-projective modules been explicitly determined.

Key words: Gorenstein-projective modules; Gorenstein algebras; Upper triangular matrix algebras

责任编辑 廖 坤