文章编号:1000－5471(2013)12－0009－04

Ω-Abel 群范畴中的积与余积[①]

高百俊[1]，　汤建钢[2]

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000；2. 伊犁师范学院 科研处，新疆 伊宁 835000

摘要：引入以交换的有单位元的 Quantale 为真值集的 Ω-Abel 群范畴的概念，利用范畴理论研究了 Ω-Abel 群范畴的积与余积.

关　键　词：Ω-Abel 群范畴；积；余积

中图分类号：O154.1　　　　**文献标志码：A**

1965 年，文献[1] 首次提出了模糊集的概念，用于刻画客观世界中的某种不确定性，迄今已形成一个较为完善的数学分支，在许多领域起到了重要作用. 随后，文献[2] 指出，模糊集理论与多值逻辑理论有着密切的联系. 这里所说的“多值逻辑”，指的是其真值表为完备剩余格 L 的广义的“多值逻辑”，它的真值的个数一般多于 2. 文献[3] 引入 4 种格上拓扑空间范畴，分别讨论了其乘积和上积. 文献[4] 定义了 S-代数及其箭图的表示范畴，证明了其模范畴与其箭图的表示范畴是等价的. 近年来，文献[5－7] 讨论了以完备的 Heyting 代数为真值集的 $\mathscr{L}$ 集合范畴的相关性质，其中 $\mathscr{L}$ 是特殊的交换的有单位元的 Quantale. 本文欲建立以交换的有单位元的 Quantale 为真值集的 Abel 群范畴，并讨论此范畴的积与余积.

1　Ω-Abel 群范畴

首先回顾有关交换的有单位元的 Quantale 的概念. 一个交换的有单位元的 Quantale 是指一个三元组 $(\Omega, *, I)$，其中 Ω 是完备格，$(\Omega, *)$ 是以 I 为单位的交换半群，并且对每个 $p \in \Omega$，$p * (-): \Omega \longrightarrow \Omega$ 是保序映射，而且有右伴 $p \rightarrow (-): \Omega \longrightarrow \Omega$. 事实上，对任意的 $p, q, r \in \Omega$，$p * q \leqslant r$ 当且仅当 $p \leqslant q \rightarrow r$.

本文总假设 Ω 表示一个完备格，0 是它的最小元，1 是它的最大元.

定义 1　设 G 是一个 Abel 群，Ω 是一个交换的有单位元的 Quantale，若映射 $A: G \longrightarrow \Omega$ 满足：

(1°) $A(0) = I$，其中 0 是 Abel 群 G 的单位元；

(2°) 对任意的 $g_1, g_2 \in G$，$A(g_1) * A(g_2) \leqslant A(g_1 + g_2)$；

(3°) 对任意的 $g \in G$，$A(g) \leqslant A(-g)$.

则称映射 $A: G \longrightarrow \Omega$ 是 Ω-Abel 子群，序对 (G, A) 称为 Ω-Abel 群.

由所有的 Ω-Abel 子群构成的范畴记作 $\mathscr{F}_\Omega(G)$.

对任意的 $G, H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp})$，设 $f: G \longrightarrow H \in \mathrm{Mor}(\mathrm{AbGp})$，可以定义下面 2 个函子：

(a) $f^*: \mathscr{F}_\Omega(G) \longrightarrow \mathscr{F}_\Omega(H)$，$A \longmapsto f^*(A)$，其中对任意的 $h \in H$，

$$f^*(A)(h) = \bigvee \{A(g) \mid g \in G,\ f(g) = h\}$$

(b) $f_*: \mathscr{F}_\Omega(H) \longrightarrow \mathscr{F}_\Omega(G)$，$B \longmapsto f_*(B)$，其中 $f_*(B) = B \circ f$.

---

① 收稿日期：2012－05－16

基金项目：新疆维吾尔自治区普通高校重点学科开放课题(2012zdxk10).

作者简介：高百俊(1980－)，女，新疆精河人，讲师，主要从事代数与序结构的研究.

设(G, A)，(H, B)是 Ω-Abel 群，若一个群同态 $f: G \longrightarrow H$ 满足 $A \leqslant f_*(B)$，则称(f, f_*)为(G, A)到(H, B)的同态.

引理 1 设$(f, f_*):(G, A) \longrightarrow (H, B)$，$(g, g_*):(H, B) \longrightarrow (Z, C)$均为 Ω-Abel 群之间的同态，则

$$(g, g_*) \circ (f, f_*) = (gf, (gf)_*)$$

证 因为$(f, f_*):(G, A) \longrightarrow (H, B)$，$(g, g_*):(H, B) \longrightarrow (Z, C)$是 Ω-Abel 群之间的同态，所以

$$A \leqslant f_*(B) = B \circ f \qquad B \leqslant g_*(C) = C \circ g$$

于是

$$A \leqslant C \circ g \circ f = (g \circ f)_*(C)$$

故$(gf, (gf)_*)$是(G, A)到(Z, C)的同态.

定义 2 设 $G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp})$，Ω 是一个交换的有单位元的 Quantale，Ω-Abel 群范畴 Ab(Ω) 是指：

(1°) 对象：序对(G, A)，这里 $G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp})$，$A: G \longrightarrow \Omega$ 是 Ω-Abel 子群；

(2°) 态射：序对$(f, f_*):(G, A) \longrightarrow (H, B)$，这里 $f: G \longrightarrow H$ $(G, H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp}))$为一个 Abel 群同态，且 $A \leqslant f_*(B)$；

(3°) 态射的合成(见引理 1).

2 Ω-Abel 群范畴 Ab(Ω) 中的积与余积

设 I 是非空指标集. 接下来将刻画 Ω-Abel 群范畴 Ab(Ω) 中的积与余积.

定理 1 设$\{(G_i, A_i)\}_{i \in I}$是范畴 Ab(Ω) 中的一族对象，则下列叙述等价：

(ⅰ) $\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴 Ab(Ω) 中的积.

(ⅱ) $\{(G, p_i)\}_{i \in I}$是诸 G_i 在 Abel 群范畴 AbGp 中的积，且 $A = \bigwedge_{i \in I} p_{i*}(A_i)$.

证 (ⅱ)⟹(ⅰ) 设$(H, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}(\Omega))$，

$$(f_i, f_{i*}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(\Omega)}((H, B), (G_i, A_i)) \qquad i \in I$$

则 $H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp})$，且

$$f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AbGp}}(H, G_i) \qquad i \in I$$

由于$\{(G, p_i)\}_{i \in I}$是诸 G_i 在范畴 AbGp 中的积，所以存在唯一的态射 $h: H \longrightarrow G$，使得 $p_i \circ h = f_i (i \in I)$.

由于(p_i, p_{i*})是(G, A)到(G_i, A_i)的态射，(f_i, f_{i*})是(H, B)到(G_i, A_i)的态射，可知对任意的 $i \in I$，$B \leqslant f_{i*}(A_i)$，于是 $B \leqslant \bigwedge_{i \in I} f_{i*}(A_i)$，即

$$B \leqslant \bigwedge_{i \in I} A_i \circ f_i = \bigwedge_{i \in I} A_i \circ (p_i \circ h) = \bigwedge_{i \in I} (A_i \circ p_i) \circ h = \bigwedge_{i \in I} p_{i*}(A_i) \circ h = A \circ h = h_*(A)$$

故(h, h_*)是(H, B)到(G, A)的态射，也即图 1 交换.

易知(h, h_*)的唯一性，故$\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴 Ab(Ω) 中的积.

(ⅰ)⟹(ⅱ) 由于$\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴 Ab(Ω) 中的积，所以对任意的态射$(f_i, f_{i*}):(H, B) \longrightarrow (G_i, A_i)$，都存在唯一的态射$(h, h_*):(H, B) \longrightarrow (G, A)$可使图 1 交换，其中$(H, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}(\Omega))$. 于是对任意的 $i \in I$，有 $f_i = p_i \circ h$，也即存在唯一的态射 $h: H \longrightarrow G$，使得图 2 交换，即$\{(G, p_i)\}_{i \in I}$是诸 G_i 在范畴 AbGp 中的积.

$$\begin{tikzcd}
 & (G, A) \arrow[d, "(p_i, p_{i*})"] \\
(H, B) \arrow[ur, "(h, h_*)"] \arrow[r, "(f_i, f_{i*})"'] & (G_i, A_i)
\end{tikzcd}$$

图 1 (H, B)到(G, A)的态射

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "p_i"] \\
H \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f_i"'] & G_i
\end{tikzcd}$$

图 2 H 到 G 的态射

同时令

$$A^{*}=\bigwedge_{i\in I}A_i\circ p_i=\bigwedge_{i\in I}p_{i*}(A_i)\leqslant p_{i*}(A_i)$$

则(p_i, p_{i*})也是(G, A^{*})到(G_i, A_i)的态射．由于$\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i\in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的积，所以存在唯一的态射$(h, h_{i*})$：$(G, A^{*})\longrightarrow(G, A)$，使得图 3 交换．于是对任意的$i\in I$，有$p_i\circ h=p_i$，也即$p_i\circ h=p_i\circ|_G$．由于$\{p_i\}_{i\in I}$是一族单态射，故$h=|_G$．于是

$$A^{*}\leqslant h_{*}(A)=A\circ h=A\circ|_G=A$$

而由(p_i, p_{i*})是(G, A)到(G_i, A_i)的态射，可得

$$A\leqslant p_{i*}(A_i)=A_i\circ p_i\leqslant\bigwedge_{i\in I}(A_i\circ p_i)=A^{*}$$

故$A=A^{*}$．也即

$$A=\bigwedge_{i\in I}(A_i\circ p_i)=\bigwedge_{i\in I}p_{i*}(A_i)$$

定理 2　设$\{(G_i, A_i)\}_{i\in I}$是范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的一族对象，则下列叙述等价：

(ⅰ) $\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i\in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的余积；

(ⅱ) $\{(G, q_i)\}_{i\in I}$是诸G_i在 Abel 群范畴 AbGp 中的余积，且$A=\bigwedge_{i\in I}\{\mathscr{B}\mid A_i\leqslant\mathscr{B}\circ q_i\}=\bigwedge_{i\in I}\{\mathscr{B}\mid A_i\leqslant q_{i*}(\mathscr{B})\}$．

证　(ⅱ)$\Longrightarrow$(ⅰ)　设

$$(H, B)\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}(\Omega))\qquad(f_i, f_{i*}):(G_i, A_i)\longrightarrow(H, B)\qquad i\in I$$

由于$\{(G, q_i)\}_{i\in I}$是诸G_i在范畴 AbGp 中的余积，则对$H\in\mathrm{Ob}(\mathrm{AbGp})$及$f_i$：$G_i\longrightarrow A$ $(i\in I)$，存在唯一的态射h：$G\longrightarrow H$，使得$f_i=h\circ q_i(i\in I)$．由于(f_i, f_{i*})是(G_i, A_i)到(H, B)的态射，所以对任意的$i\in I$，有

$$A_i\leqslant f_{i*}(B)=B\circ f_i=B\circ(h\circ q_i)=(B\circ h)\circ q_i$$

而$A=\bigwedge_{i\in I}\{\mathscr{B}\mid A_i\leqslant\mathscr{B}\circ q_i\}$，所以$A\leqslant B\circ h$，即$A\leqslant h_{*}(B)$．故$(h, h_{*})$是$(G, A)$到$(H, B)$的态射．于是图 4 交换．

$$\begin{tikzcd}
 & (G,A) \arrow[d, "{(p_i,p_{i*})}"] \\
(G,A^*) \arrow[ur, "{(h,h_*)}"] \arrow[r, "{(p_i,p_{i*})}"'] & (G_i,A_i)
\end{tikzcd}$$

图 3　(G, A^{*})到(G, A)的态射

$$\begin{tikzcd}
 & (G,A) \arrow[dl, "{(h,h_*)}"'] \arrow[d, "{(q_i,q_{i*})}"] \\
(H,\mathrm{B}) \arrow[r, "{(f_i,f_{i*})}"'] & (G_i,A_i)
\end{tikzcd}$$

图 4　(G, A)到(H, B)的态射

由h的唯一性易知(h, h_{*})的唯一性．故$\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i\in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的余积．

(ⅰ)$\Longrightarrow$(ⅱ)　由于$\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i\in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的余积，所以对任意的态射$(f_i, f_{i*})$：$(G_i, A_i)\longrightarrow(H, B)$，存在态射$(h, h_{*})$：$(G, A)\longrightarrow(H, B)$可使图 4 交换，也即存在唯一的态射$h$：$G\longrightarrow H$，使得$f_i=h\circ q_i$对任意$i\in I$成立，所以图 5 交换，即$\{(G, q_i)\}_{i\in I}$是诸$G_i$在 Abel 群范畴 AbGp 中的余积．

同时令

$$A^{*}=\bigwedge_{i\in I}\{\mathscr{B}\mid A_i\leqslant\mathscr{B}\circ q_i\}=\bigwedge_{i\in I}\{\mathscr{B}\mid A_i\leqslant q_{i*}(\mathscr{B})\}$$

由于对任意的$i\in I$，有$A_i\leqslant q_{i*}(\mathscr{B})=\mathscr{B}\circ q_i$，所以$A_i\leqslant A^{*}\circ q_i=q_{i*}(A^{*})$．于是$(q_i, q_{i*})$也是$(G_i, A_i)$到$(G, A^{*})$的态射．而$\{(G, A), (q_i, q_{*})_{i\in I}\}$是诸$(G_i, A_i)$在范畴$\mathrm{Ab}(\Omega)$中的余积，则存在唯一的态射$(l, l_{*})$：$(G, A)\longrightarrow(G, A^{*})$，使得图 6 交换．于是$q_i=l\circ q_i$，即$|_G\circ q_i=l\circ q_i$．

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "h"'] \\ H & G_i \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "q_i"'] \end{tikzcd}$$

图 5 G 到 H 的态射

$$\begin{tikzcd} & (G, A) \arrow[dl, "(l, l_*)"'] \\ (G, A^*) & (G_i, A_i) \arrow[l, "(q_i, q_{i*})"] \arrow[u, "(q_i, q_{i*})"'] \end{tikzcd}$$

图 6 (G, A) 到 (G, A^*) 的态射

由于 $\{q_i\}_{i \in I}$ 是一族满态射，故 $|_G = l$，于是 $A \leqslant l_*(A^*) = A^* \circ l = A^*$. 而对任意的 $i \in I$，有 $A_i \leqslant q_{i*}(A) = A \circ q_i$，即 $A \geqslant A^*$，故 $A = A^*$. 也即

$$A = \bigwedge_{i \in I} \{\mathscr{B} \mid A_i \leqslant \mathscr{B} \circ q_i\} = \bigwedge_{i \in I} \{\mathscr{B} \mid A_i \leqslant q_{i*}(\mathscr{B})\}$$

参考文献：

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control，1965，8(3)：338－353.

[2] UÖHLE U. Fuzzy Real Numbers as Dedekind Cuts with Respect to A Multiple-valued Logic [J]. Fuzzy sets and Systems，1987，24(3)：263－278.

[3] 汤建钢. 几种格上拓扑空间范畴中乘积与上积运算的封闭性 [J]. 数学学报，1999，42(3)：403－410.

[4] 李 伟. S-代数的表示范畴 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(4)：101－104.

[5] 汤建钢，李国华，张 红. $\mathscr{L}$ 集合范畴的 Cartesian 闭性 [J]. 模糊系统与数学，2010，24(5)：168－174.

[6] 张 红，汤建钢，李国华. $\mathscr{L}$ 集合范畴的 $\mathscr{L}$ 幺半群模 [J]. 工程数学学报，2010，27(6)：1075－1085.

[7] 李国华，汤建钢，张 红. 逆序 $\mathscr{L}$ 集合范畴的格值函数及其性质 [J]. 模糊系统与数学，2011，25(1)：48－55.

On Product and Coproduct of Ω-Abel Group Category

GAO Bai-jun[1]， TANG Jian-gang[2]

1. College of Mathematics and Statistics，Yili Normal University，Yining Xinjiang 835000，China；

2. Department of Scientific Research，Yili Normal University，Yining Xinjiang 835000，China

Abstract：The concept of Ω-Abel group category with true value set being a commutative Quantale with unit has been introduced in this paper. Then the product and coproduct of the Ω-Abel group category is proved with the category theory.

Key words：Ω-Abel group category；product；coproduct

责任编辑 廖 坤