

# $\Omega$ -Abel 群范畴中的积与余积<sup>①</sup>

高百俊<sup>1</sup>, 汤建钢<sup>2</sup>

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000; 2. 伊犁师范学院 科研处, 新疆 伊宁 835000

**摘要:** 引入以交换的有单位元的 Quantale 为真值集的  $\Omega$ -Abel 群范畴的概念, 利用范畴理论研究了  $\Omega$ -Abel 群范畴的积与余积.

**关键词:**  $\Omega$ -Abel 群范畴; 积; 余积

**中图分类号:** O154.1

**文献标志码:** A

1965 年, 文献[1]首次提出了模糊集的概念, 用于刻画客观世界中的某种不确定性, 迄今已形成一个较为完善的数学分支, 在许多领域起到了重要作用. 随后, 文献[2]指出, 模糊集理论与多值逻辑理论有着密切的联系. 这里所说的“多值逻辑”, 指的是其真值表为完备剩余格  $L$  的广义的“多值逻辑”, 它的真值的个数一般多于 2. 文献[3]引入 4 种格上拓扑空间范畴, 分别讨论了其乘积和上积. 文献[4]定义了 S-代数及其箭图的表示范畴, 证明了其模范畴与其箭图的表示范畴是等价的. 近年来, 文献[5-7]讨论了以完备的 Heyting 代数为真值集的  $\mathcal{L}$  集合范畴的相关性质, 其中  $\mathcal{L}$  是特殊的交换的有单位元的 Quantale. 本文欲建立以交换的有单位元的 Quantale 为真值集的 Abel 群范畴, 并讨论此范畴的积与余积.

## 1 $\Omega$ -Abel 群范畴

首先回顾有关交换的有单位元的 Quantale 的概念. 一个交换的有单位元的 Quantale 是指一个三元组  $(\Omega, *, I)$ , 其中  $\Omega$  是完备格,  $(\Omega, *)$  是以  $I$  为单位的交换半群, 并且对每个  $p \in \Omega$ ,  $p * (-): \Omega \rightarrow \Omega$  是保序映射, 而且有右伴  $p \rightarrow (-): \Omega \rightarrow \Omega$ . 事实上, 对任意的  $p, q, r \in \Omega$ ,  $p * q \leq r$  当且仅当  $p \leq q \rightarrow r$ .

本文总假设  $\Omega$  表示一个完备格,  $0$  是它的最小元,  $1$  是它的最大元.

**定义 1** 设  $G$  是一个 Abel 群,  $\Omega$  是一个交换的有单位元的 Quantale, 若映射  $A: G \rightarrow \Omega$  满足:

- (1°)  $A(0) = I$ , 其中  $0$  是 Abel 群  $G$  的单位元;
- (2°) 对任意的  $g_1, g_2 \in G$ ,  $A(g_1) * A(g_2) \leq A(g_1 + g_2)$ ;
- (3°) 对任意的  $g \in G$ ,  $A(g) \leq A(-g)$ .

则称映射  $A: G \rightarrow \Omega$  是  $\Omega$ -Abel 子群, 序对  $(G, A)$  称为  $\Omega$ -Abel 群.

由所有的  $\Omega$ -Abel 子群构成的范畴记作  $\mathcal{F}_\Omega(G)$ .

对任意的  $G, H \in \text{Ob}(\text{AbGp})$ , 设  $f: G \rightarrow H \in \text{Mor}(\text{AbGp})$ , 可以定义下面 2 个函子:

- (a)  $f^*: \mathcal{F}_\Omega(G) \rightarrow \mathcal{F}_\Omega(H)$ ,  $A \mapsto f^*(A)$ , 其中对任意的  $h \in H$ ,  

$$f^*(A)(h) = \bigvee \{A(g) \mid g \in G, f(g) = h\}$$
- (b)  $f_*: \mathcal{F}_\Omega(H) \rightarrow \mathcal{F}_\Omega(G)$ ,  $B \mapsto f_*(B)$ , 其中  $f_*(B) = B \circ f$ .

① 收稿日期: 2012-05-16

基金项目: 新疆维吾尔自治区普通高校重点学科开放课题(2012zdxk10).

作者简介: 高百俊(1980-), 女, 新疆精河人, 讲师, 主要从事代数与序结构的研究.

设  $(G, A), (H, B)$  是  $\Omega$ -Abel 群, 若一个群同态  $f: G \rightarrow H$  满足  $A \leq f_*(B)$ , 则称  $(f, f_*)$  为  $(G, A)$  到  $(H, B)$  的同态.

**引理 1** 设  $(f, f_*): (G, A) \rightarrow (H, B), (g, g_*): (H, B) \rightarrow (Z, C)$  均为  $\Omega$ -Abel 群之间的同态, 则

$$(g, g_*) \circ (f, f_*) = (gf, (gf)_*)$$

**证** 因为  $(f, f_*): (G, A) \rightarrow (H, B), (g, g_*): (H, B) \rightarrow (Z, C)$  是  $\Omega$ -Abel 群之间的同态, 所以

$$A \leq f_*(B) = B \circ f \quad B \leq g_*(C) = C \circ g$$

于是

$$A \leq C \circ g \circ f = (g \circ f)_*(C)$$

故  $(gf, (gf)_*)$  是  $(G, A)$  到  $(Z, C)$  的同态.

**定义 2** 设  $G \in \text{Ob}(\text{AbGp})$ ,  $\Omega$  是一个交换的有单位元的 Quantale,  $\Omega$ -Abel 群范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  是指:

(1°) 对象: 序对  $(G, A)$ , 这里  $G \in \text{Ob}(\text{AbGp})$ ,  $A: G \rightarrow \Omega$  是  $\Omega$ -Abel 子群;

(2°) 态射: 序对  $(f, f_*): (G, A) \rightarrow (H, B)$ , 这里  $f: G \rightarrow H (G, H \in \text{Ob}(\text{AbGp}))$  为一个 Abel 群同态, 且  $A \leq f_*(B)$ ;

(3°) 态射的合成(见引理 1).

## 2 $\Omega$ -Abel 群范畴 $\text{Ab}(\Omega)$ 中的积与余积

设  $I$  是非空指标集. 接下来将刻画  $\Omega$ -Abel 群范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的积与余积.

**定理 1** 设  $\{(G_i, A_i)\}_{i \in I}$  是范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的一族对象, 则下列叙述等价:

(i)  $\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的积.

(ii)  $\{(G, p_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在 Abel 群范畴  $\text{AbGp}$  中的积, 且  $A = \bigwedge_{i \in I} p_{i*}(A_i)$ .

**证** (ii)  $\Rightarrow$  (i) 设  $(H, B) \in \text{Ob}(\text{Ab}(\Omega))$ ,

$$(f_i, f_{i*}) \in \text{Hom}_{\text{Ab}(\Omega)}((H, B), (G_i, A_i)) \quad i \in I$$

则  $H \in \text{Ob}(\text{AbGp})$ , 且

$$f_i \in \text{Hom}_{\text{AbGp}}(H, G_i) \quad i \in I$$

由于  $\{(G, p_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在范畴  $\text{AbGp}$  中的积, 所以存在唯一的态射  $h: H \rightarrow G$ , 使得  $p_i \circ h = f_i (i \in I)$ .

由于  $(p_i, p_{i*})$  是  $(G, A)$  到  $(G_i, A_i)$  的态射,  $(f_i, f_{i*})$  是  $(H, B)$  到  $(G_i, A_i)$  的态射, 可知对任意的  $i \in I, B \leq f_{i*}(A_i)$ , 于是  $B \leq \bigwedge_{i \in I} f_{i*}(A_i)$ , 即

$$B \leq \bigwedge_{i \in I} A_i \circ f_i = \bigwedge_{i \in I} A_i \circ (p_i \circ h) = \bigwedge_{i \in I} (A_i \circ p_i) \circ h = \bigwedge_{i \in I} p_{i*}(A_i) \circ h = A \circ h = h_*(A)$$

故  $(h, h_*)$  是  $(H, B)$  到  $(G, A)$  的态射, 也即图 1 交换.

易知  $(h, h_*)$  的唯一性, 故  $\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的积.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 由于  $\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的积, 所以对任意的态射  $(f_i, f_{i*}): (H, B) \rightarrow (G_i, A_i)$ , 都存在唯一的态射  $(h, h_*): (H, B) \rightarrow (G, A)$  可使图 1 交换, 其中  $(H, B) \in \text{Ob}(\text{Ab}(\Omega))$ . 于是对任意的  $i \in I$ , 有  $f_i = p_i \circ h$ , 也即存在唯一的态射  $h: H \rightarrow G$ , 使得图 2 交换, 即  $\{(G, p_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在范畴  $\text{AbGp}$  中的积.

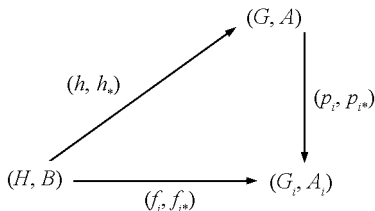


图 1  $(H, B)$  到  $(G, A)$  的态射

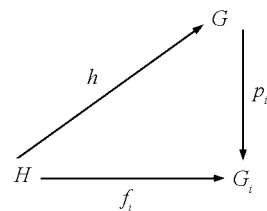


图 2  $H$  到  $G$  的态射

同时令

$$A^* = \bigwedge_{i \in I} A_i \circ p_i = \bigwedge_{i \in I} p_{i*} (A_i) \leq p_{i*} (A_i)$$

则  $(p_i, p_{i*})$  也是  $(G, A^*)$  到  $(G_i, A_i)$  的态射. 由于  $\{(G, A), (p_i, p_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的积, 所以存在唯一的态射  $(h, h_*) : (G, A^*) \longrightarrow (G, A)$ , 使得图 3 交换. 于是对任意的  $i \in I$ , 有  $p_i \circ h = p_i$ , 也即  $p_i \circ h = p_i \circ |_G$ . 由于  $\{p_i\}_{i \in I}$  是一族单态射, 故  $h = |_G$ . 于是

$$A^* \leq h_* (A) = A \circ h = A \circ |_G = A$$

而由  $(p_i, p_{i*})$  是  $(G, A)$  到  $(G_i, A_i)$  的态射, 可得

$$A \leq p_{i*} (A_i) = A_i \circ p_i \leq \bigwedge_{i \in I} (A_i \circ p_i) = A^*$$

故  $A = A^*$ . 也即

$$A = \bigwedge_{i \in I} (A_i \circ p_i) = \bigwedge_{i \in I} p_{i*} (A_i)$$

**定理 2** 设  $\{(G_i, A_i)\}_{i \in I}$  是范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的一族对象, 则下列叙述等价:

(i)  $\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的余积;

(ii)  $\{(G, q_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在 Abel 群范畴  $\text{AbGp}$  中的余积, 且  $A = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{B} \mid A_i \leq \mathcal{B} \circ q_i\} = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{B} \mid A_i \leq q_{i*}(\mathcal{B})\}$ .

证 (ii)  $\Rightarrow$  (i) 设

$$(H, B) \in \text{Ob}(\text{Ab}(\Omega)) \quad (f_i, f_{i*}) : (G_i, A_i) \longrightarrow (H, B) \quad i \in I$$

由于  $\{(G, q_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在范畴  $\text{AbGp}$  中的余积, 则对  $H \in \text{Ob}(\text{AbGp})$  及  $f_i : G_i \longrightarrow H$  ( $i \in I$ ), 存在唯一的态射  $h : G \longrightarrow H$ , 使得  $f_i = h \circ q_i$  ( $i \in I$ ). 由于  $(f_i, f_{i*})$  是  $(G_i, A_i)$  到  $(H, B)$  的态射, 所以对任意的  $i \in I$ , 有

$$A_i \leq f_{i*}(B) = B \circ f_i = B \circ (h \circ q_i) = (B \circ h) \circ q_i$$

而  $A = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{B} \mid A_i \leq \mathcal{B} \circ q_i\}$ , 所以  $A \leq B \circ h$ , 即  $A \leq h_*(B)$ . 故  $(h, h_*)$  是  $(G, A)$  到  $(H, B)$  的态射. 于是图 4 交换.

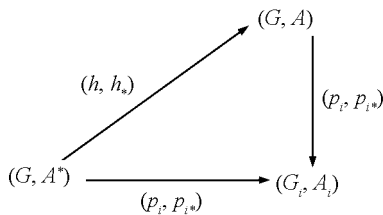


图 3  $(G, A^*)$  到  $(G, A)$  的态射

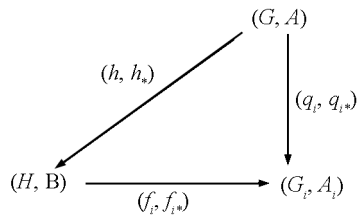


图 4  $(G, A)$  到  $(H, B)$  的态射

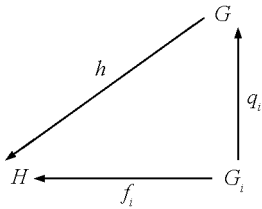
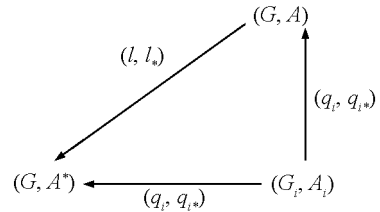
由  $h$  的唯一性易知  $(h, h_*)$  的唯一性. 故  $\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的余积.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 由于  $\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的余积, 所以对任意的态射  $(f_i, f_{i*}) : (G_i, A_i) \longrightarrow (H, B)$ , 存在态射  $(h, h_*) : (G, A) \longrightarrow (H, B)$  可使图 4 交换, 也即存在唯一的态射  $h : G \longrightarrow H$ , 使得  $f_i = h \circ q_i$  对任意  $i \in I$  成立, 所以图 5 交换, 即  $\{(G, q_i)\}_{i \in I}$  是诸  $G_i$  在 Abel 群范畴  $\text{AbGp}$  中的余积.

同时令

$$A^* = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{B} \mid A_i \leq \mathcal{B} \circ q_i\} = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{B} \mid A_i \leq q_{i*}(\mathcal{B})\}$$

由于对任意的  $i \in I$ , 有  $A_i \leq q_{i*}(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \circ q_i$ , 所以  $A_i \leq A^* \circ q_i = q_{i*}(A^*)$ . 于是  $(q_i, q_{i*})$  也是  $(G_i, A_i)$  到  $(G, A^*)$  的态射. 而  $\{(G, A), (q_i, q_{i*})_{i \in I}\}$  是诸  $(G_i, A_i)$  在范畴  $\text{Ab}(\Omega)$  中的余积, 则存在唯一的态射  $(l, l_*) : (G, A) \longrightarrow (G, A^*)$ , 使得图 6 交换. 于是  $q_i = l \circ q_i$ , 即  $|_G \circ q_i = l \circ q_i$ .

图 5  $G$  到  $H$  的态射图 6  $(G, A)$  到  $(G, A^*)$  的态射

由于  $\{q_i\}_{i \in I}$  是一族满态射, 故  $|_G = l$ , 于是  $A \leq l_*(A^*) = A^* \circ l = A^*$ . 而对任意的  $i \in I$ , 有  $A_i \leq q_{i*}(A) = A \circ q_i$ , 即  $A \geq A^*$ , 故  $A = A^*$ . 也即

$$A = \bigwedge_{i \in I} \{ \mathcal{B} \mid A_i \leq \mathcal{B} \circ q_i \} = \bigwedge_{i \in I} \{ \mathcal{B} \mid A_i \leq q_{i*}(\mathcal{B}) \}$$

### 参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338—353.
- [2] UÖHLE U. Fuzzy Real Numbers as Dedekind Cuts with Respect to A Multiple-valued Logic [J]. Fuzzy sets and Systems, 1987, 24(3): 263—278.
- [3] 汤建钢. 几种格上拓扑空间范畴中乘积与上积运算的封闭性 [J]. 数学学报, 1999, 42(3): 403—410.
- [4] 李 伟. S-代数的表示范畴 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2010, 32(4): 101—104.
- [5] 汤建钢, 李国华, 张 红.  $\mathcal{L}$ 集合范畴的 Cartesian 闭性 [J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(5): 168—174.
- [6] 张 红, 汤建钢, 李国华.  $\mathcal{L}$ 集合范畴的  $\mathcal{L}$ 么半群模 [J]. 工程数学学报, 2010, 27(6): 1075—1085.
- [7] 李国华, 汤建钢, 张 红. 逆序  $\mathcal{L}$ 集合范畴的格值函数及其性质 [J]. 模糊系统与数学, 2011, 25(1): 48—55.

## On Product and Coproduct of $\Omega$ -Abel Group Category

GAO Bai-jun<sup>1</sup>, TANG Jian-gang<sup>2</sup>

1. College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;

2. Department of Scientific Research, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China

**Abstract:** The concept of  $\Omega$ -Abel group category with true value set being a commutative Quantale with unit has been introduced in this paper. Then the product and coproduct of the  $\Omega$ -Abel group category is proved with the category theory.

**Key words:**  $\Omega$ -Abel group category; product; coproduct

责任编辑 廖 坤

