文章编号:1000-5471(2013)12-0006-03

一类有限 p-中心 p-群[①]

邵志博, 吕 恒

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 探讨了一类有限 p-中心 p-群, 得到了: 若 G 是 p-中心 p-群且 $G \in \mathrm{BI}(p^m)$, 其中 $m = 2n + e$, $e = 0, 1$. 则有下面的结论成立: $G^{p^m} \leqslant Z(G)$; 如果 $e = 0$, 则 G^{p^n} 是交换群, 如果 $e = 1$, 则 $G^{p^{n+1}}$ 是交换群; $\mathrm{cl}(G) \leqslant m + 1$.

关 键 词: p-中心 p-群; $\mathrm{BI}(l)$-群; 交换群

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A

定义 1 如果对 $p > 2$ 有 $\Omega_1(G) \leqslant Z(G)$, 则称有限 p-群 G 为 p-中心 p-群. 而对 $p = 2$, 有 $\Omega_2(G) \leqslant Z(G)$.

对于奇素数 p, p-中心 p-群的研究始于文献[1], 它主要证明了: 若群 G 是有限的 p-中心 p-群, 则 $d(G) \leqslant d(Z(G))$, 其中 $d(G)$ 表示 G 的生成元个数. 文献[2]把文献[1]的结果推广到了 2-中心 2-群上.

定义 2 若对任意 $a \in G$, 有 $|\langle a\rangle^G : \langle a\rangle| \leqslant l$ 成立, 则称群 G 是 $\mathrm{BI}(l)$-群(或者 $G \in \mathrm{BI}(l)$).

关于 $\mathrm{BI}(l)$-群的定义参见文献[3].

显然, $\mathrm{BI}(1)$-群就是 Dedekind 群, 其每个真子群是正规子群. 而对任意有限 p-群, 一定存在正整数 m 使得 $G \in \mathrm{BI}(p^m)$.

文献[3]发现一个有趣的结果: 当 p 是奇素数时, 有限 p-群 G 是 $\mathrm{BI}(p)$-群的当且仅当 G 为 J-群[4](如果对任意 $x, g \in G$, 由 $[x, g] \neq 1$ 有 $\langle x, x^g\rangle \trianglelefteq G$, 则称群 G 为 J-群).

文献[3]主要在有限 p-群中探讨了 $\mathrm{BI}(2)$-群和 $\mathrm{BI}(p^2)$-群, 而且还证明了: 对任意正整数 m, 若有限正则 p-群 G 是 $\mathrm{BI}(p^m)$-群, 则有 $G^{p^m} \leqslant Z(G)$.

定理 1 设 G 是 p-中心 p-群且 $G \in \mathrm{BI}(p^m)$, 其中 $m = 2n + e$, $e = 0, 1$. 则有下面的结论成立:

(i) $G^{p^m} \leqslant Z(G)$;

(ii) 如果 $e = 0$, 则 G^{p^n} 是交换群, 如果 $e = 1$, 则 $G^{p^{n+1}}$ 是交换群;

(iii) $\mathrm{cl}(G) \leqslant m + 1$.

在本文中, 设 G 是有限 p-群, 则特征子群

① 收稿日期: 2013-04-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11001226, 11271301).
作者简介: 邵志博(1988-), 女, 河南濮阳人, 硕士研究生, 主要从事群论的研究.
通信作者: 吕 恒, 副教授.

$$\Omega_i(G)=\langle x \mid x\in G,\ x^{p^i}=1\rangle \qquad G^{p^i}=\langle x^{p^i} \mid x\in G\rangle$$

如果没有特别声明，本文中所有的群是有限 p -群.

引理 1[4] 设群 G 是 p -中心 p -群，则 $G/\Omega_1(G)$ 也是 p -中心 p -群.

引理 2[3] 设 G 是有限 2 -群且 $G\in \mathrm{BI}(2)$，则 $\mathrm{cl}(G)\leqslant 3$. 如果 $\mathrm{cl}(G)=3$，则 $\exp(G)=8$.

引理 3 设 G 是有限 p -群且 $G\in\mathrm{BI}(p)$. 如果 p 是奇素数，则 $G^p\leqslant Z(G)$；如果 $p=2$，则 $G^4\leqslant Z(G)$.

证 易得 G 是 J -群，因此由文献[5] 可得结论.

引理 4 设群 $G=\langle a,b\rangle$ 是 p -中心 p -群且 $G\in\mathrm{BI}(p^m)$，令 $H=\langle a^p,b\rangle$，则 $H\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$.

证 假设结论不成立，且设群 G 是极小反例，则存在 $x\in H$，使得$\langle x\rangle^G=\langle x\rangle^H$，且满足 $|\langle x\rangle^H|=p^m|x|$. 令 p 阶子群 $N\leqslant\langle x\rangle^G\cap Z(G)$，又令商群 $\overline{G}=G/N$，$\overline{H}=HN/N$，$\overline{x}=xN$，则 $\overline{G}\in\mathrm{BI}(p^m)$，$\overline{H}\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$. 假设 $|x|=p$，由于 G 是 p -中心 p -群，故 $x\in Z(G)$，从而$\langle x\rangle\lhd G$，与 $|\langle x\rangle^H|=p^m\cdot|x|$ 矛盾. 又假设 $|x|=p^n>p$，则$\langle x^{p^{n-1}}\rangle\leqslant Z(G)$. 取子群 $N=\langle x^{p^{n-1}}\rangle$，由此可得$\langle\overline{x}\rangle^{\overline{H}}=\langle x\rangle^HN/N=\langle x\rangle^H/N$. 我们已经得到 $\overline{H}\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$，从而有

$$|\langle\overline{x}\rangle^{\overline{H}}:\langle\overline{x}\rangle|=|\langle x\rangle^H/N:\langle x\rangle/N|=|\langle x\rangle^H:\langle x\rangle|\leqslant p^{m-1}$$

这与 $|\langle x\rangle^H|=p^m|x|$ 矛盾. 因此假设不成立，故 $H\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$.

在引理 3 中，如果有限 2 -群 G 满足 $G\in\mathrm{BI}(2)$，则 $G^4\leqslant Z(G)$. 若加上 G 是 2 -中心群这个条件，则可以得到下面的结论：

引理 5 设 G 是有限 2 -群且 $G\in\mathrm{BI}(2)$. 如果 G 是 2 -中心 2 -群，则 $G^2\leqslant Z(G)$.

证 假设 $\exp(G)\leqslant 8$，由 G 是 2 -中心 2 -群，得 $\exp(G/\Omega_2(G))\leqslant 2$，因此 $G^2\leqslant\Omega_2(G)\leqslant Z(G)$. 假设 $\exp(G)\geqslant 2^4$. 对任意 $a,b\in G$，考虑子群 $H=\langle a,b\rangle$. 若 $b^4=1$，由 G 是 2 -中心 2 -群可得$[a^2,b]=1$. 现在不妨假设 $|a|\geqslant|b|\geqslant 8$. 如果$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=1$，由于 $H_1=\langle a^2,b\rangle\in\mathrm{BI}(1)$，从而$[a^2,b]=1$. 如果$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle\neq 1$，则一定存在 $b_1\in H$，使得 $H=\langle a,b_1\rangle$ 且$\langle a\rangle\cap\langle b_1\rangle=1$. 因此$[a^2,b_1]=[a,b_1^2]=1$. 由引理 2 知 $\mathrm{cl}(H)\leqslant 2$，从而可得 $H^2\leqslant Z(H)$，因此 $G^2\leqslant Z(G)$.

定理 1 的证明 (i) 对任意 $a,b\in G$，考虑子群 $H=\langle a,b\rangle$. 显然 H 是 p -中心 p -群且 $H\in\mathrm{BI}(p^m)$. 由引理 4 可得子群 $H_1=\langle a^{p^{m-1}},b\rangle\in\mathrm{BI}(p)$ 且是 p -中心 p -群. 如果 p 是奇素数，则由引理 3 可得 $H_1^p\leqslant Z(H_1)$，从而有$[a^{p^m},b]=1$. 如果 $p=2$，由于 H_1 是 2 -中心 2 -群，由引理 5 可得 $H_1^2\leqslant Z(H_1)$，因此$[a^{2^m},b]=1$. 由 a,b 的任意性，可得 $G^{p^m}\leqslant Z(G)$.

(ii) 若 $e=0$，令子群 $H_2=\langle a^{p^{n-1}},b^{p^n}\rangle$，则由引理 4 可得 $H_2\in\mathrm{BI}(p)$. 由结论 (i) 可得 $H_2^p\leqslant Z(H_2)$. 因此$[a^{p^n},b^{p^n}]=1$. 由 a,b 的任意性，可得 G^{p^n} 是交换群. 若 $e=1$，则子群 $H_3=\langle a^{p^n},b^{p^n}\rangle\in\mathrm{BI}(p)$. 由结论 (i) 可得 $H_3^p\leqslant Z(H_3)$，因此$[a^{p^{n+1}},b^{p^{n+1}}]=1$. 同理可得 $G^{p^{n+1}}$ 是交换群.

(iii) 令子群 $N=\Omega_1(G)$，由于 G 是 p -中心 p -群，故 $N\leqslant Z(G)$. 我们将证明商群 $G/N\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$. 对任意 $a\in G$，令 $\overline{a}=aN$，令 $\overline{G}=G/N$. 由引理 1 知，$\overline{G}$ 是 p -中心 p -群. 显然我们仅需证明 $|\langle\overline{a}\rangle^{\overline{G}}:\langle\overline{a}\rangle|\leqslant p^{m-1}$. 如果$\langle a\rangle\trianglelefteq G$，则结论显然，因此假设$\langle a\rangle$ 不是 G 的正规子群. 由于$\langle a\rangle^G$ 也是 p -中心 p -群，因此易得 $|\Omega_1(\langle a\rangle^G)|\geqslant p^2$. 显然 $\Omega_1(\langle a\rangle^G)\leqslant N\leqslant Z(G)$. 由于

$$|\langle\overline{a}\rangle^{\overline{G}}:\langle\overline{a}\rangle|=|\langle a\rangle^GN/N:\langle a\rangle N/N|<|\langle a\rangle^G:\langle a\rangle|$$

而 $|\langle a\rangle^G:\langle a\rangle|\leqslant p^m$，从而得到 $|\langle\overline{a}\rangle^{\overline{G}}:\langle\overline{a}\rangle|\leqslant p^{m-1}$. 故 $G/N\in\mathrm{BI}(p^{m-1})$.

对 G 的阶用归纳法知，$\mathrm{cl}(G/\Omega_1(G))\leqslant m$. 又因 $\Omega_1(G)\leqslant Z(G)$，因此 $\mathrm{cl}(G)\leqslant m+1$.

参考文献：

[1] HUPPERT B. Finite Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1967.

[2] AVINOAM M. Generators of 2-Groups [J]. Israel Journal of Mathematics, 1971, 10(2): 158—159.

[3] LV Heng, ZHOU Wei, YU Da-peng . Some Fnite p-Groups with Bounded Index of Every Cyclic Subgroup in Its Normal Closure [J]. Journal of Algebra, 2011, 338(2): 169—179.

[4] AVINOAM M. The Power Structure of p-Groups Ⅱ [J]. Journal of Algebra, 2007, 318(2): 953—956.

[5] HERZOG M, LONGOBARDI P, MAJ M, et al. On Generalized Dedekind Groups and Tarski Super Monsters [J]. Journal of Algebra, 2000, 226(2): 690—713.

On a Class of Finite *P*-Central *P*-Groups

SHAO Zhi-bo, LV Heng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we have studied a class of finite p-central p-groups. We prove that: If G be a finite p-central p-group with $G \in \mathrm{BI}(p^m)$, where $m=2n+e$, $e=0,1$, then the followings hold: $G^{p^m} \leqslant Z(G)$; If $e=0$, then G^{p^m} is abelian, if $e=1$, then $G^{p^{n+1}}$ is abelian; $\mathrm{cl}(G) \leqslant m+1$.

Key words: p-central p-group; $\mathrm{BI}(l)$-group; abelian group

责任编辑　廖　坤