文章编号:1000-5471(2013)12-0001-05

BL-代数的 v-滤子①

钟纯真

内江师范学院 数学与信息科学学院,四川 内江 641000

摘要: 将 Vague 集理论与 BL-代数的滤子理论相结合,提出了 BL-代数的 v-滤子的概念,研究了 BL-代数的 v-滤子的性质以及若干等价刻画,最后研究了 BL-代数的 v-滤子与滤子之间的关系.

关 键 词: BL-代数;滤子;v-滤子

中图分类号:O141 **文献标志码:A**

在逻辑代数理论中,剩余格是一种被广泛使用的代数结构.文献[1]以剩余格为基本结构建立了与基础命题逻辑系统 BL 相匹配的语义理论——基础逻辑代数 BL-代数.这种 BL-代数将逻辑代数——Lukasiewicz 代数、Godel 代数、乘积代数纳入其中,因此在逻辑代数的研究中得到了广泛关注.滤子理论是研究逻辑代数的重要内容之一,它与所对应的逻辑系统中的 MP 规则相对应.对 BL——代数的滤子理论的研究已经比较深入了,有很多丰硕的成果[2-6].

令 X 是一个对象空间,其中任意一个元素用 x 表示.X 上的一个 Vague 集[7] A 用一个真隶属度函数 $t_A(x)$ 和一个假隶属度函数 $f_A(x)$ 表示,其中 $t_A(x)$ 是从支持 x 的证据得出的 x 的隶属度的下界,$f_A(x)$ 则是从反对 x 的证据所得出的否定隶属度的下界.$t_A(x)$ 和 $f_A(x)$ 将区间$[0, 1]$中的实数与 X 中的点联系起来,即 $t_A: X \longrightarrow [0, 1]$,$f_A: X \longrightarrow [0, 1]$,其中 $t_A(x) + f_A(x) \leqslant 1$.Vague 集 A 记为

$$A = \{\langle x, [t_A(x), f_A(x)]\rangle \mid x \in X\}$$

其中区间$[t_A(x), 1 - f_A(x)]$称为 x 在 A 中的 Vague-值,记为 $V_A(x)$.

在本文中,若无特别说明,$\mathscr{L}$ 代表 BL-代数,其定义与相关性质可参见文献[1].

定义 1 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 称为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子,如果对任意的 $x, y, z \in L$,满足:

(V1) $V_A(1) \geqslant V_A(x)$;

(V2) $V_A(y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x \rightarrow y), V_A(x)\}$.

由定义 1 以及 V_A 的定义,显然下列结论成立:

定理 1 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子当且仅当对任意的 $x, y, z \in L$,满足:

(V3) $t_A(1) \geqslant t_A(x)$,$1 - f_A(1) \geqslant 1 - f_A(x)$;

(V4) $t_A(y) \geqslant \min\{t_A(x \rightarrow y), t_A(x)\}$,$1 - f_A(y) \geqslant \min\{1 - f_A(x \rightarrow y), 1 - f_A(y)\}$.

例 1 设 $L = \{O, a, b, c, d, l\}$,L 的 Hasse 图以及运算见文献[5]中的例 2.6.则 $\mathscr{L} = (L, \vee, \wedge, \rightarrow, \otimes, 0, 1)$ 为一 BL-代数.定义 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 为:

$$A = \{\langle 1, [0.7, 0.2]\rangle, \langle a, [0.5, 0.3]\rangle, \langle b, [0.5, 0.3]\rangle, \langle c, [0.5, 0.3]\rangle, \langle d, [0.5, 0.3]\rangle, \langle 0, [0.7, 0.2]\rangle\}$$

容易验证 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

---

① 收稿日期:2012-06-20

基金项目:教育部数学与应用数学专业综合改革项目(ZG0464);四川省数学与应用数学专业综合改革项目(01249);四川省教育厅资助科研项目(11ZB023).

作者简介:钟纯真(1963-),女,四川内江人,副教授,主要从事逻辑代数的研究.

定理 2 设 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，则对任意的 $x, y \in L$，满足：

(V5) 若 $x \leqslant y$，则 $V_A(x) \leqslant V_A(y)$.

证 因为 $x \leqslant y$，则 $x \rightarrow y = 1$. 由于 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，因此

$$t_A(y) \geqslant \min\{t_A(x \rightarrow y),\ t_A(x)\} = \min\{t_A(1),\ t_A(x)\}$$

$$1 - f_A(y) \geqslant \min\{1 - f_A(1),\ 1 - f_A(y)\}$$

再由条件(V4)，有 $t_A(1) \geqslant t_A(x)$，$1 - f_A(1) \geqslant 1 - f_A(y)$，故

$$t_A(y) \geqslant \min\{t_A(x),\ 1 - f_A(y)\} \geqslant 1 - f_A(y)$$

因此

$$V_A(y) = [t_A(y),\ 1 - f_A(y)] \geqslant [t_A(x),\ 1 - f_A(x)] = V_A(x)$$

定理 3 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子当且仅当对任意的 $x, y, z \in L$ 满足条件(V1) 和

(V6) $V_A(x \rightarrow z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y \rightarrow (x \rightarrow z)),\ V_A(y)\}$.

证 若 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，显然条件(V1) 和条件(V6) 成立. 反之，假设条件(V6) 成立，在条件(V6) 中取 $x = l$，则有 $V_A(z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y \rightarrow z),\ V_A(y)\}$，连同条件(V1) 知 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

定理 4 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子当且仅当对任意的 $x, y, z \in L$ 满足条件(V5) 和

(V7) $V_A(x \otimes y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x),\ V_A(y)\}$.

证 若 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，显然条件(V5) 成立. 因为 $x \leqslant y \rightarrow (x \otimes y)$，于是

$$V_A(y \rightarrow (x \otimes y)) \geqslant V_A(x)$$

再由条件(V2)，有

$$V_A(x \otimes y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y),\ V_A(y \rightarrow (x \otimes y))\} \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y),\ V_A(x)\}$$

反之，假设条件(V5) 和(V7) 成立，在条件(V5) 中取 $y = 1$，则条件(V1) 成立. 又因 $x \leqslant (x \rightarrow y) \rightarrow y$，故 $x \otimes (x \rightarrow y) \leqslant y$，从而

$$V_A(y) \geqslant V_A(x \otimes (x \rightarrow y))$$

再由条件(V7)，有

$$V_A(y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x),\ V_A(x \rightarrow y)\}$$

因此条件(V2) 成立，故 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

定理 5 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子当且仅当对任意的 $x, y, z \in L$ 满足条件(V1) 和

(V8) $V_A((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x),\ V_A(y)\}$.

证 若 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，显然条件(V1) 成立. 因为

$$V_A((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow z)),\ V_A(y)\}$$

$$(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow z) = x \vee (y \rightarrow z) \geqslant x$$

由条件(V5)，有

$$V_A((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow z)) \geqslant V_A(x)$$

因此

$$V_A((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x),\ V_A(y)\}$$

反之，假设条件(V8) 成立. 因为

$$V_A(y) = V_A(1 \rightarrow y) = V_A(((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x \rightarrow y),\ V_A(x)\}$$

因此条件(V2) 成立，连同条件(V1) 得 A 为 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

定理 6 设 A 是 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集，若 A 满足条件：

(V9) 如果 $a_n \rightarrow (a_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow (a_1 \rightarrow x)\cdots) = 1$，有

$$V_A(x) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(a_n),\ \cdots,\ V_A(a_1)\}$$

则 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

证 设 $x, y, z \in L$ 使得 $z \leqslant x \rightarrow y$，则

$$1 = z \rightarrow (x \rightarrow y) = z \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow \cdots \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow y))\cdots))$$

因此由条件(V9)，有

$$V_A(y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(z), V_A(x), V_A(I)\} = \mathrm{imin}\{V_A(z), V_A(x)\}$$

则 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

定理 7 设 A 是 $\mathscr{L}$ 的 Vague 集. A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子当且仅当对任意的 $x, y, z \in L$，满足：

(V10) $V_A(1) \geqslant V_A(x)$；

(V11) $V_A(x \to z) \geqslant \mathrm{imin}\{ V_A(x \to y), V_A(y \to z)\}$.

证 设 A 是 v-滤子. 因为$(x \to y) \leqslant (y \to z) \to (x \to z)$，且 A 是保序的，因此

$$A((y \to z) \to (x \to z)) \geqslant A(x \to y)$$

由于 A 是 v-滤子，故

$$V_A(x \to z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y \to z), V_A((y \to z) \to (x \to z))\}$$

故

$$V_A(x \to z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y \to z), V_A(x \to z)\}$$

反之，若

$$V_A(x \to z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x \to y), V_A(y \to z)\}$$

则

$$V_A(1 \to z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(1 \to y), V_A(y \to z)\}$$

即

$$V_A(z) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(y), V_A(y \to z\}$$

由条件(V10) 知 A 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

设两个 Vague 集 A 和 B 的交集为 C，即 $C = A \cap B$，其真假隶属度函数分别为：

$$t_C = \min\{t_A, t_B\}$$

$$1 - f_C = \min\{1 - f_A, 1 - f_B\} = 1 - \max\{f_A, f_B\}$$

定理 8 设 A, B 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，则 $A \cap B$ 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

证 设 $x, y, z \in L$，使得 $z \leqslant x \to y$，则 $z \to (x \to y) = l$. 由于 A, B 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子，故

$$V_A(y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_A(z), V_A(x)\}$$

$$V_B(y) \geqslant \mathrm{imin}\{V_B(z), V_B(x)\}$$

即

$$t_A(y) \geqslant \min\{t_A(z), t_A(x)\}$$

且

$$1 - f_A(y) \geqslant \min\{1 - f_A(z), 1 - f_A(x)\}$$

$$t_B(y) \geqslant \min\{t_B(z), t_B(x)\}$$

$$1 - f_B(y) \geqslant \min\{1 - f_B(z), 1 - f_B(x)\}$$

由于

$$\begin{aligned} t_{A\cap B}(y) =& \min\{t_A(y), t_B(y)\} \geqslant \min\{ \min\{t_A(z), t_A(x)\}, \min\{t_B(z), t_B(x)\}\} = \\ & \min\{ \min\{t_A(z), t_B(z)\}, \min\{t_A(x), t_B(x)\}\} = \\ & \min\{t_{A\cap B}(z), \min_{A\cap B}(x)\} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} 1 - f_{A\cap B}(y) =& \min\{1 - f_A(y), 1 - f_B(y)\} \geqslant \\ & \min\{ \min\{1 - f_A(z), 1 - f_A(x)\}, \min\{1 - f_B(z), 1 - f_B(x)\}\} = \\ & \min\{ \min\{1 - f_A(z), 1 - f_B(z)\}, \min\{1 - f_A(x), 1 - f_B(x)\}\} = \\ & \min\{1 - f_{A\cap B}(z), 1 - f_{A\cap B}(x)\} \end{aligned}$$

因此

$$V_{A\cap B}(y) = [t_{A\cap B}(y), 1 - f_{A\cap B}(y)] \geqslant \mathrm{imin}\{V_{A\cap B}(z), V_{A\cap B}(x)\}$$

则 $A \cap B$ 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

定理9 设A是$\mathscr{L}$的Vague集，则

(ⅰ) 若对任意的$\alpha,\beta\in[0,1]$，$A_{(\alpha,\beta)}$是$\mathscr{L}$的v-滤子，则对任意的$x,y,z\in L$，满足：

(V12) $V_A(z)\leqslant \mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}\Rightarrow V_A(z)\leqslant V_A(y)$；

(ⅱ) 如果A满足条件(V1)和(V12)，则对任意的$\alpha,\beta\in[0,1]$，$A_{(\alpha,\beta)}$是$\mathscr{L}$的v-滤子.

证 (ⅰ) 假设对任意的$\alpha,\beta\in[0,1]$，$A_{(\alpha,\beta)}$是$\mathscr{L}$的v-滤子，且对任意$x,y,z\in L$，满足

$$V_A(z)\leqslant \mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}$$

因为

$$V_A(z)=[t_A(z),1-f_A(z)]$$

故

$$V_A(x\rightarrow y)\geqslant[t_A(x\rightarrow y),1-f_A(x\rightarrow y)]$$
$$V_A(x)\geqslant[t_A(x),1-f_A(x)]$$

即

$$x\rightarrow y\in A_{(t_A(z),1-f_A(z))}\qquad x\in A_{(t_A(z),1-f_A(z))}$$

又因$t_A(z)\in[0,1]$，$1-f_A(z)\in[0,1]$，且$A_{(t_A(z),1-f_A(z))}$是$\mathscr{L}$的滤子，因此$y\in A_{(t_A(z),1-f_A(z))}$，故$V_A(z)\leqslant V_A(y)$.

(ⅱ) 假设A满足条件(V1)及(V12). 对任意的$x,y\in L$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，有$x\rightarrow y\in A_{(\alpha,\beta)}$，$x\in A_{(\alpha,\beta)}$，因此$V_A(x\rightarrow y)\geqslant[\alpha,\beta]$且$V_A(x)\geqslant[\alpha,\beta]$，从而

$$\mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}\geqslant[\alpha,\beta]$$

由条件(V12)有$V_A(y)\geqslant[\alpha,\beta]$，即$y\in A_{(\alpha,\beta)}$.

因为对任意的$x\in L$，有$V_A(1)\geqslant V_A(x)$，因此$V_A(1)\geqslant[\alpha,\beta]$，即$1\in A_{(\alpha,\beta)}$. 故对任意的$\alpha,\beta\in[0,1]$，$A_{(\alpha,\beta)}$是$\mathscr{L}$的滤子.

定理10 设A是$\mathscr{L}$的v-滤子，则对任意的$\alpha,\beta\in[0,1]$，$A_{(\alpha,\beta)}(\neq\varnothing)$是$\mathscr{L}$的滤子.

证 因为$A_{(\alpha,\beta)}\neq\varnothing$，故存在$\alpha,\beta\in[0,1]$，使得$V_A(x)\geqslant[\alpha,\beta]$. 又因$A$是$\mathscr{L}$的$v$-滤子，故对任意的$x\in L$，有$V_A(l)\geqslant V_A(x)\geqslant[\alpha,\beta]$，因此$l\in A_{(\alpha,\beta)}$.

设$x,y\in L$且$x\in A_{(\alpha,\beta)}$，$x\rightarrow y\in A_{(\alpha,\beta)}$，因此

$$V_A(x)\geqslant[\alpha,\beta]\qquad V_A(x\rightarrow y)\geqslant[\alpha,\beta]$$

即$t_A(x)\geqslant\alpha$，$1-f_A(x)\geqslant\beta$且$t_A(x\rightarrow y)\geqslant\alpha$，$1-f_A(x\rightarrow y)\geqslant\beta$. 因此

$$t_A(y)\geqslant\min\{t_A(x\rightarrow y),t_A(x)\}\geqslant\alpha$$
$$1-f_A(y)\geqslant\min\{1-f_A(x\rightarrow y),1-f_A(x)\}\geqslant\beta$$

因为A是$\mathscr{L}$的v-滤子，故

$$V_A(y)\geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}\geqslant[\alpha,\beta]$$

即$y\in A_{(\alpha,\beta)}$. 因此$A_{(\alpha,\beta)}$是$\mathscr{L}$的滤子.

定理10中的滤子$A_{(\alpha,\beta)}$也称为$\mathscr{L}$的Vague-cut滤子.

定理11 $\mathscr{L}$的任意滤子F均是$\mathscr{L}$的某个v-滤子的Vague-cut滤子.

证 考虑$\mathscr{L}$的Vague集

$$V_A(x)=\begin{cases}[\alpha,\alpha] & x\in F\\ [0,0] & x\notin F\end{cases}$$

其中$\alpha\in[0,1]$. 因为F是$\mathscr{L}$的滤子，故$1\in F$，因此$V_A(1)=[\alpha,\alpha]\geqslant V_A(x)$. 对任意的$x,y\in L$，如果$y\in F$，则

$$V_A(y)=[\alpha,\alpha]\geqslant \mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}$$

假设$y\notin F$，则$x\notin F$或$x\rightarrow y\notin F$，因此有

$$V_A(y)=[0,0]=\mathrm{imin}\{V_A(x\rightarrow y),V_A(x)\}$$

故A是$\mathscr{L}$的v-滤子.

定理12 设A是$\mathscr{L}$的v-滤子，则$F=\{x\in L\mid V_A(x)=V_A(1)\}$是$\mathscr{L}$的$v$-滤子.

证　因为 $F=\{x \in L \mid V_A(x)=V_A(1)\}$，则 $1 \in F$. 设 $x \to y \in F$，$x \in F$，故

$$V_A(x \to y)=V_A(x)=V_A(1)$$

因此

$$V_A(y) \geqslant \operatorname{imin}\{V_A(x \to y), V_A(x)\}=V_A(1)$$

又因 $V_A(1) \geqslant V_A(1)$，故 $V_A(y)=V_A(1)$，从而有 $y \in F$. 因此 F 是 $\mathscr{L}$ 的 v-滤子.

本文将 Vague 集运用到 BL-代数的滤子理论，引入了 BL-代数的 v-滤子，并研究了该滤子的性质以及若干等价刻画，最后研究了 BL-代数的 v-滤子与滤子之间的关系. 本文的方法可用于研究 BL-代数的 Vague(正) 关联滤子，也可用于研究其他逻辑代数(例如格蕴涵代数，R_0-代数等) 滤子理论.

参考文献：

[1] HÁJEK P. Metamathematics of Fuzzy Logic [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] HAVESHKI M, SAEID A B, ESLAMI E. Some Types of Filters in BL-Algebras [J]. Soft Comput, 2006, 10(8): 657-664.

[3] KONDO M, DUDEK W A. Filter Theory of BL-Algebras [J]. Soft Comput, 2008, 12(5): 419-423.

[4] LIU Lian-zhen, LI Kai-tai. Fuzzy Boolean and Positive Implicative Filters of BL-Algebras [J]. Fuzzy Sets Syst, 2005, 152(2): 333-348.

[5] MA Xue-ling, ZHAN Jian-ming. On ($\in$, $\in \vee q$)-Fuzzy Filters of BL-Algebras [J]. Jrl Syst Complexity, 2008, 21(1): 144-158.

[6] TURUNEN E. Boolean Deductive Systems of BL-Algebras [J]. Arch Math Logic, 2001, 40(6): 467-473.

[7] GAU W L, BUEHRER D J. Vague Sets [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(20): 610-614.

On *v*-Filters of BL-Algebras

ZHONG Chun-zheng

College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan 641000, China

Abstract: In this paper, the concept of v-filters on BL-algebras has been introduced by linking the vague set and filter theory of BL-algebra; The properties and equivalent characterizations of v-filters have been investigated, and the relations between vague filters and filters have been studied.

Key words: BL-algebra; filters; v-filters

责任编辑　廖　坤