第 36 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0264-04

关于辐角函数的教学探讨①

欧增奇, 陈清明

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 采用割破平面的方法,讨论了辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 和 $w=\mathrm{Arg}\, R(z)$ 的多值性以及单值连续分支的问题,其中 $R(z)$ 是有理函数.

关 键 词: 辐角函数;割破平面;单值连续分支

中图分类号: G420 **文献标志码:** A

在复数域中对多值函数进行研究具有重要的意义,这样的研究能看出函数多值性的本质. 在复变函数课程中,初等多值函数主要是指对数函数 $w=\mathrm{Ln}\, z$、根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 和反三角函数 $w=\mathrm{Arcsin}\, z$ 等. 目前大部分复变函数教材[1-5]对它们的研究都采用限制辐角或割破平面的方法来分出它们的单值解析分支,并对其性质作简略的介绍. 在教学中,初等多值函数是复变函数课程的重点和难点,历届学生对这部分知识的学习都感到十分困难. 原因何在? 我们从几个初等多值函数

$$w=\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z \qquad w=z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}=\mathrm{e}^{\alpha(\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z)}$$

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}\, z}{n}} \qquad w=\mathrm{Arcsin}\, z=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})+\frac{\pi}{2}$$

的定义中可以看出:对数函数、一般幂函数、根式函数及反三角函数具有多值性的根本原因在于辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 的多值性. 因此要对初等多值函数作进一步的研究,必须首先对辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 的多值性作深入的讨论. 本文采用割破平面的方法,讨论了辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 和 $w=\mathrm{Arg}\, R(z)$ 的多值性以及单值连续分支的问题,其中 $R(z)$ 是有理函数.

1 辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z\,(z\in C\backslash\{0\})$ 的单值连续分支

辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 虽然不是一般意义下的复变数初等函数,但是它的多值性直接导致了其它初等函数的多值性. 由于辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 的多值性在应用时不太方便,下面将其分解成单值连续函数,每个单值连续函数称为它的单值连续分支. 为此考虑复平面除去负实轴(包括原点)而得到的区域 D_1. 易知,在 D_1 内,辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 可分解为无穷多个单值函数,记为

$$w_k=(\mathrm{Arg}\, z)_k=\arg z+2k\pi \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

其中 $\arg z$ $(-\pi<\arg z<\pi)$ 表示 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值. 显然 $w_0=\arg z$ $(z\in D_1)$ 是单值函数. 区域 D_1 可以看成是沿负实轴割开复平面而得到的. 负实轴称为割线,它是 D_1 的边界,并把割线看作有不同的上下两沿. 当点 z 在负实轴上沿时,取 $\arg z=\pi$;当点 z 在负实轴下沿时,取 $\arg z=-\pi$.

类似地,考虑复平面除去正实轴(包括原点)而得到的区域 D_2. 在 D_2 内,辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\, z$ 也可分解为无穷多个单值函数,记为

---

① 收稿日期:2010-06-08
作者简介:欧增奇(1975-),男,重庆铜梁人,讲师,主要从事非线性泛函分析的研究.

$$w_k=(\mathrm{Arg}\,z)_k=\arg z+2k\pi \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

其中 $\arg z$ $(0<\arg z<2\pi)$ 表示 $\mathrm{Arg}\,z$ 的 1 个特定值．显然 $w_0=\arg z$ $(z\in D_2)$ 是单值函数．当点 z 在正实轴上沿时，取 $\arg z=0$；当点 z 在正实轴下沿时，取 $\arg z=2\pi$.

现在研究把辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 在一般复平面区域内分解为单值连续分支的问题．首先给出如下定义：

定义 1　设函数 $w=f(z)$ 在点 a 的某空心邻域 $U^0(a)$ 内有定义，C 是 $U^0(a)$ 中绕点 a 的任意闭简单连续曲线．令 $z_0\in C$，取定 $f(z)$ 在点 z_0 处的 1 个定值 $f(z_0)$，当变点 z 从 z_0 出发沿闭曲线 C 连续变动 1 周回到出发点 z_0 时，若函数 $f(z)$ 的值回不到出发点的值 $f(z_0)$，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的支点．连接支点的任意简单连续曲线称为割线.

变点绕支点转圈，多值函数就由一支变到另一支．要想让变点不能绕支点转圈，简单的办法就是将复平面割开，在割开的复平面上确定单值分支函数.

在扩充复平面上，辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 在点 $0,\infty$ 上是无意义的，但按定义 1，容易验证 $0,\infty$ 皆为 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 的支点．取连接原点 0 和无穷远点 ∞ 的 1 条无界简单曲线 K 作为割线(不限于负实轴或正实轴)，得到区域 E，且以割线 K 为其边界，我们易得下面的结论：

性质 1　对于区域 E 中任一简单封闭曲线 L，当变点 z 从定点 $z_0\in L$ 出发沿曲线 L 连续变动 1 周回到出发点 z_0 时，辐角的增量为零，即 $\Delta_L\mathrm{Arg}\,z=0$.

性质 2　对于区域 E 中任一不通过 z_0 的简单曲线 L，有 $\Delta_L\mathrm{Arg}(z-z_0)=\Delta_L\mathrm{Arg}(z_0-z)$.

性质 3　在区域 E 中，辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 可分解成无穷多个单值函数.

性质 4　在区域 E 中，辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 的每个单值函数是连续的.

证　任取辐角函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 的 1 个单值分支函数，不妨记为 $w=\mathrm{Arg}\,z$，在区域 E 中任意取定 1 个点 z_0．由于点 z_0 为 E 的内点，则存在 $\delta_0>0$，使得以 z_0 为心，δ_0 为半径的邻域 $U(z_0,\delta_0)\subset E$．过原点作圆周 $|z-z_0|=\delta_0$ 的 2 条切线 K_1,K_2，则切线 K_1,K_2 构成了张角为 $2\varepsilon_0\left(\varepsilon_0=\arcsin\left(\dfrac{\delta_0}{|z_0|}\right)\right)$ 的角形区域，并且此角形区域不含割线 L 上的点，但包含了邻域 $U(z_0,\delta_0)$．那么对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，作以 z_0 为心，$\delta=|z_0|\sin\varepsilon>0$ 为半径的邻域 $U(z_0,\delta)$ $(\subset U(z_0,\delta_0))$，当 $z\in U(z_0,\delta)$ 时，总有

$$|\mathrm{Arg}\,z-\mathrm{Arg}\,z_0|<\varepsilon$$

即单值分支函数 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 在 z_0 处连续．由 z_0 的任意性知 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 在 E 上连续.

推论 1　$w=\arg z$ $(-\pi<\arg z<\pi)$ 在除去负实轴和原点外的复平面上处处连续；$w=\arg z$ $(0<\arg z<2\pi)$ 在除去正实轴和原点外的复平面上处处连续.

定理 1　给定 $z_0\in E$，并取定 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 z_0 处的定值为 $\arg z_0$．则对任意的 $z\in E$ 和 E 中连接 z_0 及 z 的任意简单曲线 L，$w=\mathrm{Arg}\,z=\Delta_L\mathrm{Arg}\,z+\arg z_0$ 只与起点 z_0 和定值 $\arg z_0$ 及终点 z 有关，而与连接 z_0 及 z 的简单曲线 L 无关.

证　设 $z_0\in E$，取 $w=\mathrm{Arg}\,z$ 在 z_0 处的值为 $\arg z_0=\theta_0$，设 $z_1(\neq z_0)\in E$，在 E 内作 1 条连接 z_0 及 z_1 的简单曲线 γ．则当 z 从 z_0 出发沿 γ 连续变动到 z_1 时，$\mathrm{Arg}\,z$ 从 θ_0 连续变动到 θ_1．因为 γ 是 E 内的紧集(即有界闭集)，所以可以用有限个在 E 内且不含原点的圆盘 $C_0,C_1,\cdots,C_k$ 覆盖 γ，使得 $z_0\in C_0$，$z_1\in C_k$，$C_j\cap C_{j+1}\neq\varnothing$ $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$．从 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 z_0 的值 $\arg z_0=\theta_0$ 出发，由性质 4 知，可依次确定 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 C_j 内的单值连续分支 $g_j(z)$ $(j=0,1,2,\cdots,k)$，且对任意的 $z\in C_j\cap C_{j+1}$ $(j=0,1,2,\cdots,k-1)$，有 $g_j(z)=g_{j+1}(z)$，那么设 $g_k(z_1)=\theta_1$，可见当 z 从 z_0 出发沿 γ 连续变动到 z_1 时，$\mathrm{Arg}\,z$ 也从 θ_0 连续变动到 θ_1.

在 E 内任作另一条连接 z_0 及 z_1 的简单曲线 γ_1，那么曲线 γ 和曲线 γ_1 组成了 1 条封闭曲线 L_0．则由性质 1，当变点 z 从 $z_0\in L_0$ 出发沿曲线 L_0 连续变动 1 周回到出发点 z_0 时，辐角的增量为零，那么 $0=\Delta_{L_0}\mathrm{Arg}\,z=\Delta_\gamma\mathrm{Arg}\,z-\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,z$，即 $\Delta_\gamma\mathrm{Arg}\,z=\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}\,z$．这就是说，取定 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 $z_0\in E$ 处的值为 $\arg z_0=\theta_0$，当 z 从 z_0 出发沿 E 内的 1 条简单曲线 γ 连续变动到 z_1 时，$\mathrm{Arg}\,z$ 从 θ_0 连续变动到 θ_1，这里 θ_1 只与 z_0,θ_0 及 z_1 有关，而与曲线 γ 的选取无关.

例 1　分别取负实轴(含原点)和射线 $z=(1+\mathrm{i})t$ $(t\geqslant 0)$ 为割线，$w=\mathrm{Arg}\,z$ 在相应区域内的 1 个单值连续分支为 $f(z)=\arg z\left(\arg\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\arg(-\mathrm{i})$；仍取负实轴(含原点)和射线 $z=(1+\mathrm{i})t$ $(t\geqslant 0)$ 为割

线，设 $w = \mathrm{Arg}\, z$ 在相应区域内的另一单值连续分支为 $g(z) = \arg z \left(\arg \mathrm{i} = \frac{5\pi}{2}\right)$，求 $\arg(-\mathrm{i})$.

解 (i) 记 L_1 表示在以负实轴和原点为割线的区域内从 i 到 $-$i 的任一简单曲线，L_2 表示在以射线 $z = (1+\mathrm{i})t\ (t \geqslant 0)$ 为割线的区域内的从 i 到 $-$i 的任一简单曲线，则有

$$\arg(-\mathrm{i}) = \arg \mathrm{i} + \Delta_{L_1} \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg(-\mathrm{i}) = \arg \mathrm{i} + \Delta_{L_2} \mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

(ii) 记 C_1 表示在以负实轴和原点为割线的区域内从 i 到 $-$i 的任一简单曲线，C_2 表示在以射线 $z = (1+\mathrm{i})t\ (t \geqslant 0)$ 为割线的区域内的从 i 到 $-$i 的任一简单曲线，则有

$$\arg(-\mathrm{i}) = \arg \mathrm{i} + \Delta_{C_1} \mathrm{Arg}\, z = \frac{5\pi}{2} - \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arg(-\mathrm{i}) = \arg \mathrm{i} + \Delta_{C_2} \mathrm{Arg}\, z = \frac{5\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{2}$$

注 1 由例题 1 不难发现：辐角函数 $w = \mathrm{Arg}\, z$ 的单值连续分支取决于割线和辐角函数 $w = \mathrm{Arg}\, z$ 在相应区域上任一定点 z_0 处的确定值 $\arg z_0$. 即：若割线相同，而在 z_0 处的定值 $\arg z_0$ 不同，那么就是不同的单值连续的分支，此时辐角函数 $w = \mathrm{Arg}\, z$ 的任意 2 个单值连续分支相差 2π 的整数倍；如果割线不同，即使在 z_0 处的定值 $\arg z_0$ 相同，但仍是不同的单值连续分支.

2 函数 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$ 的单值连续分支($R(z)$ 是有理函数)

对于较复杂的函数 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$($R(z)$ 是有理函数)，应如何确定其单值连续分支呢？ 首先应按支点的定义求出该函数的一切支点，然后适当连接支点以割破复平面. 于是在复平面上以此割线为边界的区域 E 内就能分出函数的单值连续分支，易得如下定理：

定理 2 对于函数 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$，其中 $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{A}{B}\ \dfrac{(z-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z-a_k)^{\alpha_k}}{(z-b_1)^{\beta_1}\cdots(z-b_l)^{\beta_l}}$，$a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_l$ 是互不相同的常复数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_l \in \mathbb{N}^+$ 且 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \alpha$，$\beta_1 + \cdots + \beta_l = \beta$，有

(a) $a_1,\cdots,a_k$，$b_1,\cdots,b_l$ 是函数 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$ 的支点；

(b) 当 $\alpha \neq \beta$ 时，∞ 是 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$ 的支点，当 $\alpha = \beta$ 时，∞ 不是 $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$ 的支点；

(c) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中若干个之和与 $\beta_1,\cdots,\beta_l$ 中若干个之和相等，则将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，$b_1,\cdots,b_l$ 中对应的那几个点连成割线，抱成团，即变点 z 沿只包含它们在其内部的简单闭曲线转 1 周后，函数值不变，这种抱成的团可能不止 1 个，其余不入团的点则与 ∞ 连接成 1 条割线；

(d) 在单值分支区域 E 内，取定 1 个点 z_0 并确定 $\mathrm{Arg}\, R(z)$ 在 z_0 处的值 $\arg R(z_0)$，则

$$w = \mathrm{Arg}\, R(z) = \mathrm{Arg}\, R(z) - \arg R(z_0) + \arg R(z_0) = \Delta_L \mathrm{Arg}\, R(z) + \arg R(z_0)$$

其中 L 是 E 内不过割线的连接 z_0 与 z 的简单曲线.

例 2 考查函数 $W = \mathrm{Arg}\, \dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$ 的支点.

解 方法一：由定理 2 可知 $0, \pm 1, 2, \infty$ 都是 $W = \mathrm{Arg}\, \dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$ 的支点.

方法二：直接按支点的定义求支点. 记 $T = \dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$，由于 $W = \mathrm{Arg}\, T$ 的支点是 0 和 ∞，所以 $W = \mathrm{Arg}\, \dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$ 可能的支点是 $0, \pm 1, 2, \infty$.

当 z 沿内部只含 0(但不包含 $\pm 1, 2$) 的简单闭曲线 C_0 的正方向绕行 1 周时，z 的辐角增量为 -2π(即：$\Delta_{C_0} \mathrm{Arg}\, T = -2\pi$)，但是 $z+1, z-1, z-2$ 的辐角均未发生变化. 从而 0 是其 1 个支点. 同理可证：$\pm 1, 2$ 也是其支点. 做简单闭曲线 C 使之同时包含 $0, \pm 1, 2$ 点，点 z 沿 C 正向绕行 1 周后，有

$$\Delta_C w = (\Delta_C \arg(z+1) + \Delta_C \arg(z-1) + \Delta_C \arg(z-2) - \Delta_C \arg z) = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2\pi = 4\pi$$

因此 ∞ 点也是其支点.

由于 $0, \pm 1, 2, \infty$ 都是函数 $W = \mathrm{Arg}\,\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$ 的支点，那么根据定理 2，我们可以作许多不同的割线，例如：

割线 C_1：$[-1, 0] \cup [1, +\infty)$；

割线 C_2：$[0, 1] \cup (-\infty, -1] \cup \{z \mid z = -t + (1-t)\mathrm{i}, t \in [0, 1]\} \cup \{z \mid z = 2t + (1-t)\mathrm{i}, t \in [0, 1]\}$；

割线 C_3：$(-\infty, -1] \cup \{z \mid z = -t - (1-t)\mathrm{i}, t \in [0, 1]\} \cup \{z \mid z = t - (1-t)\mathrm{i}, t \in [0, 1]\} \cup \{z \mid z = t(1+\mathrm{i}), t \in [0, 1]\} \cup \{z \mid z = 2t + (1-t)(1+\mathrm{i}), t \in [0, 1]\}$.

例 3　取割线 C_1，函数 $W = \mathrm{Arg}\,\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}$ 在相应区域内的 1 个单值连续分支为 $f(z)$ $\left(f(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $f(-\mathrm{i})$.

解　由于

$$\Delta_{C_1} W = \Delta_{C_1} \mathrm{Arg}(z+1) + \Delta_{C_1} \mathrm{Arg}(z-1) + \Delta_{C_1} \mathrm{Arg}(z-2) - \Delta_{C_1} \mathrm{Arg}\, z =$$
$$-\frac{\pi}{2} - \pi + \frac{\pi}{2} + 2\arctan 2 = 2\arctan 2 - \pi$$

那么有

$$f(-\mathrm{i}) = f(\mathrm{i}) + \Delta_{C_1} W = \frac{\pi}{2} + 2\arctan 2 - \pi = 2\arctan 2 - \frac{\pi}{2}$$

3　结　论

在对辐角函数的多值性有了较深入的理解后，就可以进一步研究其它的多值函数. 首先确定它们的支点，然后在复平面上以连接支点的曲线作割线，得一区域. 在这区域内，可把有关多值函数分成连续函数分支.

参考文献：

[1]　余家荣. 复变函数 [M]. 北京：高等教育出版社，2008.

[2]　钟玉泉. 复变函数论 [M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[3]　钟玉泉. 复变函数学习指导书 [M]. 北京：高等教育出版社，1995.

[4]　路见可，钟寿国，刘士强，等. 复变函数 [M]. 武汉：武汉大学出版社，2010.

[5]　庄圻泰，张南岳. 复变函数 [M]. 北京：北京大学出版社，1984.

A Discussion on Argument Function

OU Zeng-qi，　CHEN Qing-ming

School of Mathmatics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：By using the method of lacerating plane，the multivaluedness and single-valued continuous branches of the argument functions $w = \mathrm{Arg}\, z$ and $w = \mathrm{Arg}\, R(z)$ are considered，where $R(z)$ is a rational function.

Key words：argument function；lacerating plane；single-valued continuous branch

责任编辑　廖　坤