文章编号:1000-5471(2011)03-0255-05

基于相似度测量法的模糊最短路径问题①

周庆新

成都信息工程学院 数学学院,成都 610225

摘要: 提供了一种基于相似度测量法处理模糊最短路径问题的算法,通过计算各路径的相似度找到模糊最短路径长度,并获得相应的模糊最短路径.

关键词: 最短路径问题;模糊数;相似度

中图分类号: TP311 **文献标志码:** A

文献[1]用Floyd算法和Ford算法来处理模糊最短路径问题.此方法能获得最短路径长度,但不能获得相应的路径.在此方法的基础上,许多研究者作了改进,得到了很多寻找模糊最短路径的方法[2-5].为解决模糊最短路径问题,必须从众多模糊数比较方法中找出一种较理想的比较方法[6-12].

设U为论域,$U=\{x\}$. U上的模糊集$\widetilde{A}$可以用其隶属函数$\mu_{\widetilde{A}}(x)$来刻画,它将U上的每个元素与[0,1]区间上的实数联系起来.

定义1 论域U上的模糊集$\widetilde{A}$通常表示为:$\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x))\mid x\in U\}$,其中:$\mu_{\widetilde{A}}$称为$\widetilde{A}$的隶属函数,$\mu_{\widetilde{A}}(x)$称为$x$的隶属度.

当$\mu_{\widetilde{A}}(x)=1$时,则x完全属于模糊集$\widetilde{A}$;当$\mu_{\widetilde{A}}(x)=0$时,则x完全不属于模糊集$\widetilde{A}$;$\mu_{\widetilde{A}}(x)$越接近1时,则x属于模糊集$\widetilde{A}$的程度越大.当隶属函数$\mu_{\widetilde{A}}(x)$为0或1时,$\mu_{\widetilde{A}}(x)$与普通集合的特征函数一致,$\widetilde{A}$退化为普通集合.

定义2 满足$\mu_{\widetilde{A}}(x)$严格为正的所有x的普通集称为$\widetilde{A}$的支撑集$\mathrm{Supp}(\widetilde{A})$,即

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{A})=\{x\in U\mid \mu_{\widetilde{A}}(x)>0\}$$

定义3 模糊集$\widetilde{A}$的α-截集$\widetilde{A}_\alpha$是满足$\mu_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\alpha$的所有$x$的集合,$x\in U$,记为

$$\widetilde{A}_\alpha=\{x\in U\mid \mu_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\alpha\}$$

其中α称为水平或置信水平.

一个模糊数是$\widetilde{A}$的支撑集$\mathrm{Supp}(\widetilde{A})$的一个模糊子集,它是正态的和凸的.为了方便,模糊数可定义为:(a,b,c,d),模糊数的成员函数可表示为:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\mu_a^L(x) & a\leqslant x<b\\ 1 & b\leqslant x\leqslant c\\ \mu_a^R(x) & c\leqslant x\leqslant d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

下面给出两类特殊的模糊数,三角模糊数和梯形模糊数的定义.

定义4 一个三角模糊数被定义为一个三元组(a_1,a_2,a_3),其成员函数为:

---

① 收稿日期:2011-01-18
基金项目:西藏自治区气象局校地合作项目.
作者简介:周庆新(1956-),女,云南大理人,副教授,主要从事优化理论与方法研究.

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leqslant x \leqslant a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leqslant x \leqslant a_3 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

图 1 为一个三角模糊数.

定义 5　一个梯形模糊数被定义为一个四元组(a_1, a_2, a_3, a_4),其成员函数为:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leqslant x < a_2 \\ 1 & a_2 \leqslant x \leqslant a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leqslant x \leqslant a_4 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

图 2 为一个梯形模糊数.

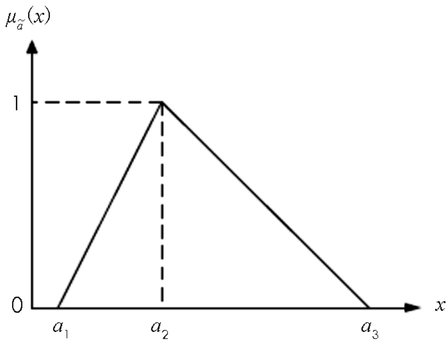

图 1　三角模糊数

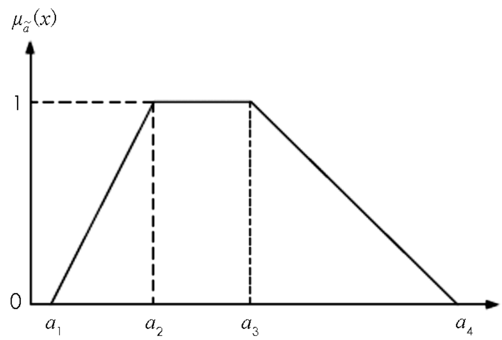

图 2　梯形模糊数

定义 6　假定 $\tilde{a}=(a_1, a_2, a_3)$,$\tilde{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 是两个三角模糊数,则关于三角模糊数的基本运算如下:

$$\tilde{a}+\tilde{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \qquad \tilde{a}\times\tilde{b}=(a_1\times b_1, a_2\times b_2, a_3\times b_3)$$

类似地,对于梯形模糊数 $\tilde{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$,$\tilde{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ 有:

$$\tilde{a}+\tilde{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4) \qquad \tilde{a}\times\tilde{b}=(a_1\times b_1, a_2\times b_2, a_3\times b_3, a_4\times b_4)$$

定义 7　对 m 个梯形模糊数,$\tilde{L}_1=(l_1^1, l_2^1, l_3^1, l_4^1)$,$\tilde{L}_2=(l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2)\cdots$,$\tilde{L}_m=(l_1^m, l_2^m, l_3^m, l_4^m)$ 称 $\tilde{L}^{\min}=\min(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots\tilde{L}_m)=(\min(l_1^1, l_1^2, \cdots, l_1^m), \min(l_2^1, l_2^2, \cdots, l_2^m), \min(l_3^1, l_3^2, \cdots, l_3^m), \min(l_4^1, l_4^2, \cdots, l_4^m))$ 为 m 个梯形模糊数的最小值.

类似对 m 个三角模糊数 $\tilde{L}_1=(l_1^1, l_2^1, l_3^1)$,$\tilde{L}_2=(l_1^2, l_2^2, l_3^2)\cdots$,$\tilde{L}_m=(l_1^m, l_2^m, l_3^m)$ 有 $\tilde{L}^{\min}=\min(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots\tilde{L}_m)=(\min(l_1^1, l_1^2, \cdots, l_1^m), \min(l_2^1, l_2^2, \cdots, l_2^m), \min(l_3^1, l_3^2, \cdots, l_3^m))$.

下面介绍寻找两个模糊数相似度的方法,用两个模糊数与它们最小模糊数相交的面积比较它们的相似度. 若模糊数与最小模糊数相交的面积越大,则它们的相似度越高.

考虑三角模糊数的相似度,设 $\tilde{a}=(a, b, c)$,$\tilde{a}_1=(a_1, b_1, c_1)$,$\tilde{a}_2=(a_2, b_2, c_2)$,其中,$a=\min(a_1, a_2)$,$b=\min(b_1, b_2)$,$c=\min(c_1, c_2)$. 三角模糊数与最小三角模糊数的相交面积如图 3 所示.

通过相似三角形可计算阴影部分的面积,从图 3 可知,无论是 $a_i > b$ 或 $a_i \leqslant b$ 都有:

$$\begin{cases}\dfrac{y_i}{1}=\dfrac{c-x}{c-b} \\ \dfrac{y_i}{1}=\dfrac{x-a_i}{b_i-a_i}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{cb_i-ba_i}{c-b+b_i-a_i} \\ y=\dfrac{c-a_i}{c-b+b_i-a_i}\end{cases}$$

因此阴影部分的面积为 $S=\dfrac{1}{2}y(c-a_i)=\dfrac{1}{2}\dfrac{(c-a_i)^2}{c-b+b_i-a_i}$. 当然,若两个三角模糊数不相交,则 $S=0$. 令

相似度为 $SI=\frac{S_{阴}}{S_{\Delta}}=\frac{(c-a_i)^2}{(c-b+b_i-a_i)(c-a)}$.

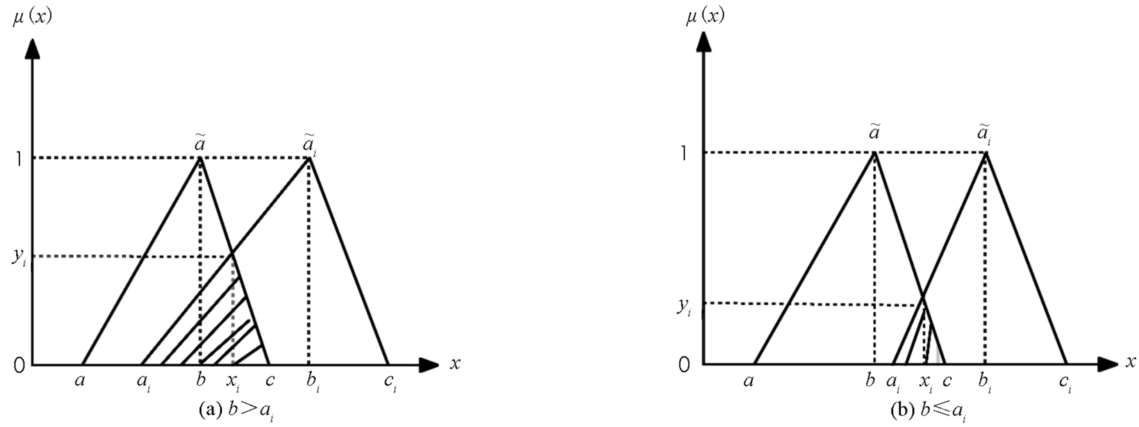

图 3　两个三角模糊数的相似度

考虑梯形模糊数 $\tilde{a}=(a,b,c,d)$，$\tilde{a}_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$，$\tilde{a}_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$，其中：$a=\min(a_1,a_2)$，$b=\min(b_1,b_2)$，$c=\min(c_1,c_2)$，$d=\min(d_1,d_2)$. 由图 4(a) 有 $\begin{cases}\frac{y}{1}=\frac{d-x}{d-c}\\ \frac{y}{1}=\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{db_i-ca_i}{d-c+b_i-a_i}\\ y=\frac{d-a_i}{d-c+b_i-a_i}\end{cases}$. 因此阴影部分的面积为 $S=\frac{1}{2}y(d-a_i)=\frac{1}{2}\frac{(d-a_i)^2}{d-c+b_i-a_i}$，其相似度为 $SI=\frac{(d-a_i)^2}{(d-c+b_i-a_i)(d-a+c-b)}$.

从图 4(b) 可得阴影部分的面积为 $S=\frac{1}{2}(d-a_i+c-b_i)$，其相似度为 $SI=\frac{d-a_i+c-b_i}{d-a+c-b}$. 显然，若两个梯形模糊数不相交，则 $SI=0$.

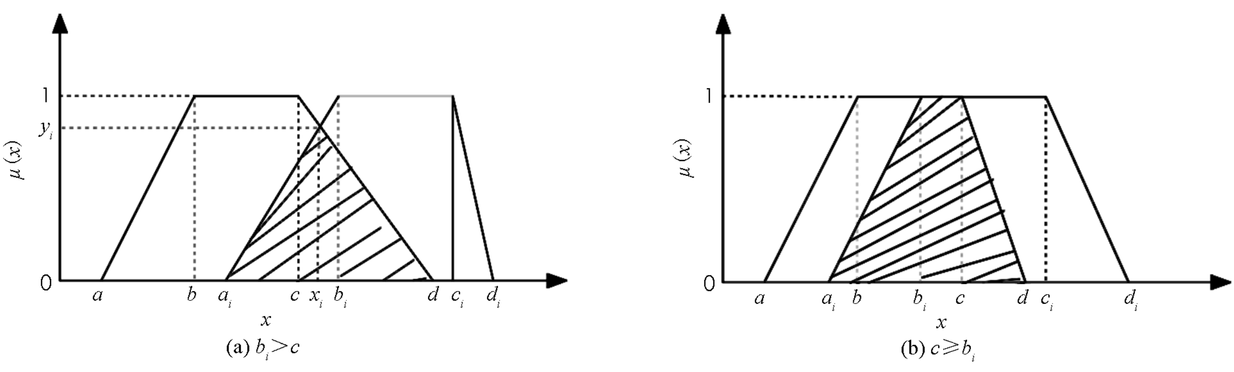

图 4　两个梯形模糊数的相似度

考虑由有限点集和有限弧集构成的有向网络 $G=(V,E)$，其中：$V=\{u,v_1,\cdots,v_n,v\}$ 为网络结点构成的集合，u,v 分别表示网络的源和汇；E 为所有弧构成的集合. 用有序对 (i,j) 表示结点 i,j 之间的弧，弧长用 $L_{i,j}$ 表示. 在网络中，从结点 u 到结点 v 的路径是指一个点的序列 $(u,v_1,v_2,\cdots,v_m,v)$ 使得 (u,v_1)，(v_1,v_2)，$\cdots(v_m,v)$，$m\leqslant n$. 路径的长度是该路径上所有的弧长之和. 在两点 u 到 v 之间的最短路径是指 u 到 v 之间所有路径中路径长度最短的路径. 每条弧的长度是不精确的，如是三角模糊数或梯形模糊数，那么 u 到 v 之间的路径长度也是不精确的. 这种情况下的最短路径问题被称为模糊最短路径问题. 其模型如下：

$$\min\tilde{f}(x)=\sum_{(i,j)\in E}\tilde{L}_{i,j}x_{i,j}$$

$$s.\ t.\ \sum_j x_{i,j}-\sum_j x_{j,i}=1,\ 若\ i=u$$

$$\sum_j x_{i,j} - \sum_j x_{j,i} = 0,\ 若\ i \neq u, v(i=1,2,\cdots n)$$

$$\sum_j x_{i,j} - \sum_j x_{j,i} = -1,\ 若\ i = v$$

$$x_{i,j} = 0,\ 1,\ \forall\ (i,\ j) \in E$$

其中 $\widetilde{L}_{i,j}$ 是相对于弧长的模糊集.

本文设计一个新的算法决定模糊最短路径及模糊最短路径长度. 假定 u 到 v 之间有 n 条路径，每条弧的长度都是模糊数，则每条路径的长度都是模糊数. 因此要找到模糊最短路径及模糊最短路径长度，寻找一个合适的比较方法来比较各条路径的长度是非常重要的. 下面用模糊相似度测量法推导出含有梯形模糊数和三角模糊数的模糊最短路径问题的算法.

其步骤如下：

Step1. 搜索从点 u 到 v 之间的所有可能路径，计算相应的模糊路径长度 $\widetilde{L}_i = (l_1^{(i)},\ l_2^{(i)},\ l_3^{(i)},\ l_4^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,m$，$m$ 为可能的路径数目.

Step2. 计算各模糊路径长度的最小模糊数 $\widetilde{L}^{\min}$.

Step3. 计算各模糊路径长度与 $\widetilde{L}^{\min}$ 的相似度 $D_i = SI(\widetilde{L}^{\min},\ \widetilde{L}_i)$，$i=1,2,\cdots,m$.

Step4. 计算最短路径长度及相应的最短路径：

$$d^{\min}(\widetilde{L}_r) = \max\{D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m\},\ r \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$$

则 $\widetilde{L}_r$ 所在的路径即为 u 到 v 的最短路径. 类似可得参数为三角模糊数的模糊最短路径算法.

例 1. 计算图 5 所示 11 个节点的模糊最短路径问题

运行本文算法得到其模糊最短路径为：1 → 10 → 11，模糊最短路径长为：(920，1010，1120).

例 2. 计算图 6 所示 11 个节点的模糊最短路径问题.

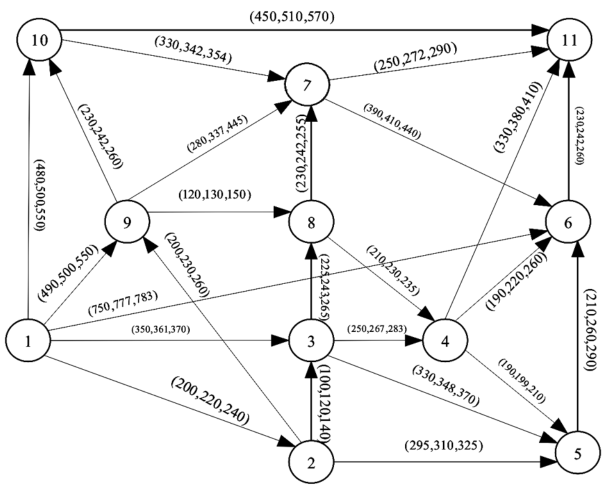

图 5　参数为三角模糊数的 11 个节点的最短路径问题

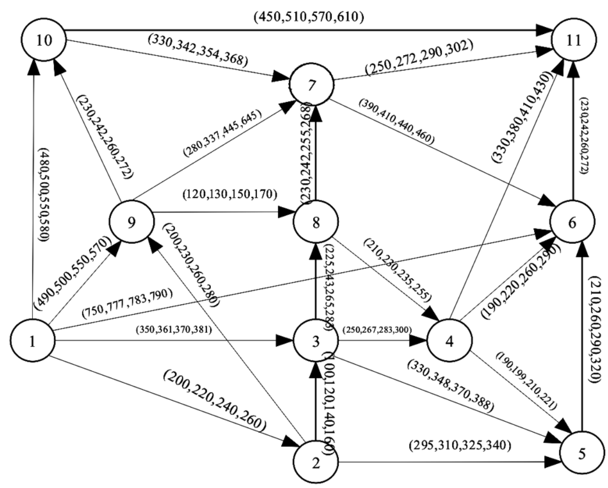

图 6　参数为梯形模糊数的 11 个节点的最短路径问题

运行本文算法得到其模糊最短路径为：1 → 10 → 11. 模糊最短路径长为：(920，1010，1120，1190).

通过上面的 4 个实例可知算法是可行的，对获取模糊最短路径及模糊最短路径长度有实用价值.

本文获得了相似度测量法比较模糊数大小的公式，并将其用于模糊最短路径问题中，通过 2 个算例解释了算法的可行性和适用性.

参考文献：

[1] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.

[2] LIN K, CHEN M. The Fuzzy Shortest Path Problem and its Most Vital Arcs [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 58: 343-353.

[3] KLEIN C M. Fuzzy Shortest Paths [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 39: 27-43.

[4] MARTINS E. On a Multi Criteria Shortest Path Problem [J]. European Journal of Operational Research, 1984, 16: 236－245.

[5] TANAKA H, ICHIHASHI H, ASAI K. A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem Based on Comparison of Fuzzy Numbers [J]. Control and Cybernetics, 1984, 13: 185－194.

[6] DUBOIS D, PRADE H. Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory [J]. Information Sciences, 1983, 30: 183－224.

[7] CHEN S H. Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17: 113－129.

[8] BORTOLAN G, DEGANI R. A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 15: 1－19.

[9] CHENG C H. A New Approach for Ranking Fuzzy Numbers by Distance Method [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95: 307－317.

[10] DELGADO M, VERDEGAY J L, VILA M A. A Procedure for Ranking Fuzzy Numbers Using Fuzzy Relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 26: 49－62.

[11] FORTEMS P, ROUBENS M. Ranking and Defuffyfication Methods Based on Area Compensation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 82: 319－330.

[12] 牟　琼，杨春德. 一种基于梯形模糊数互补判断矩阵确定权重的方法 [J]. 重庆邮电学院学报：自然科学版，2006，18(6)：809－812.

The Fuzzy Shortest Path Problem on Similarity Measure Method

ZHOU Qing-xin

College of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China

Abstract: In this paper, the author discusses the shortest path problem from a specified vertex to other vertex on a network with imprecise arc lengths as fuzzy numbers. Using an order relation between fuzzy numbers, the author proposes a new algorithm to deal with the fuzzy shortest path problem. The algorithm is obtained by means of ranking fuzzy numbers by a similarity measure, and the fuzzy shortest length and the shortest path is got. Two illustrative examples are worked out to demonstrate the proposed algorithm.

Key words: shortest path problem; fuzzy numbers; similarity measure

责任编辑　张　枸