

# 单连域无旋向量场的标量表示和场力线绘制<sup>①</sup>

董小刚<sup>1</sup>, 李兰秀<sup>2</sup>, 朱海军<sup>1</sup>, 邹小兵<sup>3</sup>

1. 装甲兵工程学院 控制系, 北京 100072; 2. 北京师范大学 物理系, 北京 100875; 3. 清华大学 电机系, 北京 100084

**摘要:** 为方便表述并按传统形式描绘向量场, 基于经典物理思想和从头计算原则, 利用现代计算机技术和数值模拟方法构建标量形式的向量场. 以激光脉冲纳秒斩波开关和内置周期金环的 CO<sub>2</sub> 激光器放电管为例, 针对单连通域中无旋向量场的边值问题, 讨论了在平行平面场和旋转对称场情形下, 场势函数数值求解后, 场向量分布的标量构建和场力线分布的传统的可视化表述, 提供了解决场强准确直观描述的一种有效方法.

**关键词:** 标量表示; 数值模拟; 激光器件; 场力线绘制

**中图分类号:** O441.4

**文献标志码:** A

目前科学技术和工程应用问题的研究与解决常遵循的途径和环节主要有四步: ①物理化. 首先把问题追究、成形为物理问题, 抽象成简单的物理概念和模型. ②数学化. 将该物理问题归纳为数学问题, 用严格、完备的逻辑符号来表述并推演其各种因素间的数量关系, 即物理方程及相应的定解条件; 对于自然界最基本、工程应用也最普遍的电磁相互作用规律已有完备、普适、优美的数学形式<sup>[1]</sup>表述, 常需做的是具体定解问题的数学构建. ③数值化. 即数量关系、参数影响、结果、结构的具体数据化, 将数学问题变为数值模拟问题, 以解决大多数物理方程不能解析求解的困难. 而基于现代计算机技术的计算方法发展充分, 数值求解、从头计算较之于从前的级数展开、参数拟合以及微扰摄动等近似计算方法可认为是较大的进步, 为许多难题的严格精确求解提供了可行的途径. ④图形化. 直观表述公式演绎、数值模拟的结果, 可视地具体反映问题的量值及变化关系, 免除某些推演求解结果的复杂艰深. 事实上数值阵列和图形本身就是函数的重要基本表述方式, 与公式形式等价, 合为函数表示的 3 种基本方式. 当然, 作为实证科学, 实验验证是必不可少的最终环节.

场力线的绘制及表示是一个经典问题<sup>[2]</sup>, 但在普通物理教材<sup>[3-4]</sup>中一般讨论较少, 且基本限于定性演示. 实际的定量表示方法有实验测绘法<sup>[5]</sup>、点矢量表示法<sup>[6]</sup>和线追踪法<sup>[7]</sup>等. 实验测绘法需在场中加入传感探头, 存在较多的欠缺和限制: 一是采值的点有限, 场描绘必然相当粗略; 二是探头无论做得多小并采用边缘拟合、平衡测量等控制, 仍会对所测场造成扰动、修改; 三是选点、采值不可能很快, 难以做到实时采值, 基本上只能用于描绘静态场或稳恒场; 四是需要大量的取点、换算、作垂线等操作, 相当繁难, 常需手工操作并强烈地依赖操作者的经验、工作状态及对场点先验的取舍, 难以做到客观准确. 点矢量表示法基于数值模拟求解, 虽能给出场中所选网格点上场矢量的方向, 但不够直观, 所绘小箭头簇图难以直接看出场矢量的大小、方向尤其是在场中的相对大小分布. 线追踪法亦基于数值模拟求解, 所得图线虽可直观地看出沿场力线各处场矢量的走向及相对大小, 但其横向的疏密取决于预选值, 仍不能直接客观自然地确定场力线横向上场强的相对大小, 计算思想也较繁复, 存在一定的人为先验性.

本文就平行平面场和旋转对称场单连通域中静电场的情况, 在利用计算机数值模拟求解算出电场位函数的场分布之后, 用计算机编程数值计算出场中等通量面分布, 借助 MATLAB, Graphtools 或别的任何一

① 收稿日期: 2010-04-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10035030).

作者简介: 董小刚(1962-), 男, 重庆人, 清华大学博士后, 副教授, 主要从事军用光电子技术的研究.

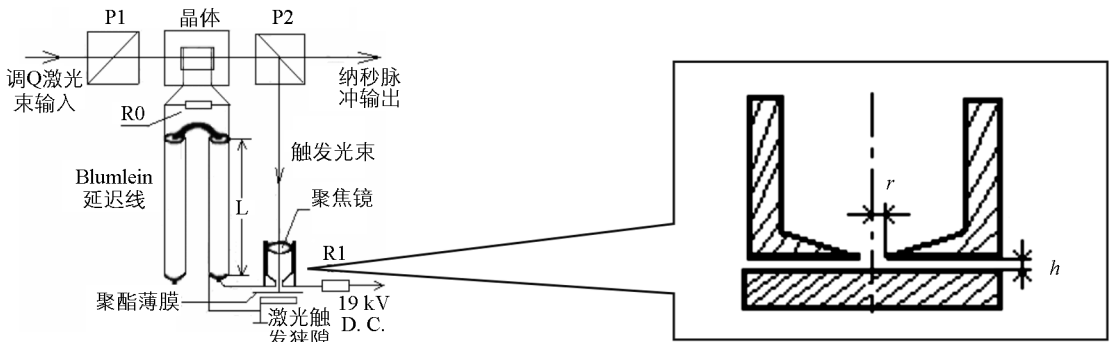
种绘图工具, 在分别对平行平面场和旋转对称场给以一定的限制后, 按等通量和等通量密度绘出曲线, 实现了用计算机数值模拟描绘传统习惯的电力线, 即曲线的切线方向就是电场的方向, 电力线的疏密反映电场相对强度.

### 1 原理和方法

平行平面场为相对简单的二维情况, 文献[2]对此已给出理论上基本完备的解决和算法(如保角变换等), 本文所举例子皆为实际激光系统器件中较普遍的旋转对称场情况.

激光脉冲纳秒斩波开关<sup>[8]</sup>及其关键部件激光触发狭隙(LTSG)的结构如图 1 所示. 可视其由一对大平面电极夹一层聚酯薄膜构成, 上电极的中心有一小圆孔, 孔内侧倒角. 电极间距  $h$  约为 0.1 mm, 小圆孔半径  $r$  小于 0.5 mm, 电极间加 19 kV 的直流高压. 系统旋转对称, 不易按平行平面场用保角变换等方法析求解. 电极间及小圆孔内为单连通域, 静电场无旋. 无聚酯薄膜时场内空间亦无源, 问题系旋转对称, 在柱坐标系下可写出定解问题:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; \\ u(\rho, 0) &= 0; \\ u(\rho, z) &= u_0; (\rho \geq r, h \leq z \leq \rho_0 + \rho/2) \end{aligned}$$



P1: 起偏器; P2: 检偏转向器.

图 1 激光脉冲纳秒斩波开关示意图

内置环状金催化剂的 CO<sub>2</sub> 激光器<sup>[5]</sup>如图 2 所示, 其放电管内周期环间的稳恒场的定解问题要复杂一些.

采用有限差分法<sup>[6]</sup>和 VC6.0 编程, 对定解问题作数值模拟求解, 求出场内各点的电位值, 数据传给绘图软件后即可按空间三维型面、平面等位线簇、伪彩色填充等多种方式画出电位的场分布<sup>[6,9]</sup>.

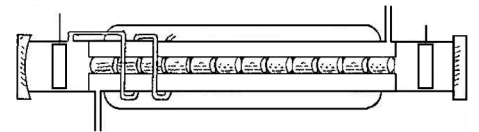


图 2 内置环状金催化剂的 CO<sub>2</sub> 激光器

为构建标量形式的向量场表示, 注意到  $\Delta\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}dS$  为沿面  $S$  正向穿过面  $S$  的电通量, 对于无源无旋场的单连通区域,  $\Delta\Phi$  仅与面  $S$  的边界和定义的方向有关, 而与面  $S$  的具体形状无关. 对于平面标量场, 有  $S = \Delta D \cdot L$ ,  $dS = \Delta D \cdot dl$ ,  $\Delta D$  为平面法向上的单位厚度,  $\Delta\Phi = \Delta D \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}dl$ ,  $a, b$  为平面上积分路径曲线  $L$  的端点. 旋转对称场情况稍复杂一些,  $dS = 2\pi\rho d\rho + 2\pi\rho dz$ . 由此可定义标量场  $\Phi$ , 对于平行平面场和旋转对称场, 只要按对称性等先验的已知条件先行选定 0 参考值的位置(这显然有相当的任意性), 场中各点的  $\Phi$  值(标量)即等于 0 参考点到该点的电通量(积分)值, 可逐点一一确定. 注意到不含点源的场中各点场强的唯一性(电力线不交叉), 电力线即等通量线(平面标量场为等通量曲面, 旋转对称场为曲面管), 故标量场  $\Phi$  中等值线的切线方向即场向量的方向, 等值线的疏密反映场向量的大小, 与传统电力线族的表示一致. 由此, 势函数  $u$  和通量函数  $\Phi$  即构成了单连通无旋向量场的基本完备的标量数值表示. 用任一绘图软件按画等差等值线的方法即可画出电力线族, 且其密度分布能正确反映各处场强的相对大小. 具体做法是, 利用已得到的相邻点的电位值及点间距离, 求出差商而得各点场强沿坐标轴的正交分量, 根据对称性等选定某条可先行确定的电力线作为 0 通量参考基线, 如旋转对称轴必是一条电力线的所在, 激光开关狭

隙中远离小圆孔处的电力线垂直于上下电极面等, 都可选作  $\Phi$  的 0 值线而作为计算的起点. 再由此 0 值处出发沿任选的路径(如坐标线)逐点积分(递加).

### 2 结果和讨论

图 3 为激光脉冲纳秒斩波开关的狭隙电极间和上电极小园孔内的等电位线分布, 其最左侧纵坐标线处为旋转对称轴. 图 4 是按标量场  $\Phi$  等值线绘制的电力线, 用普通 PC 机 VC++ 编程计算并由 MATLAB 绘制<sup>[9]</sup>.

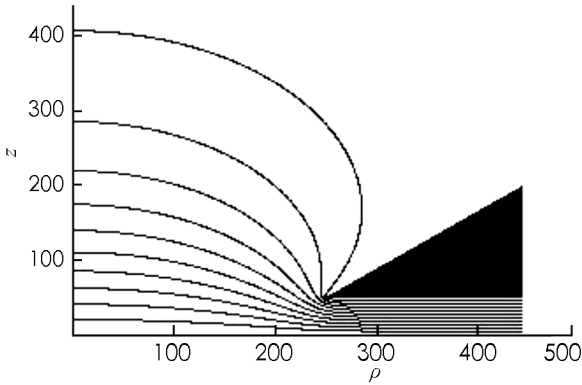


图 3 无聚酯薄膜时的极间电场等位(面)分布

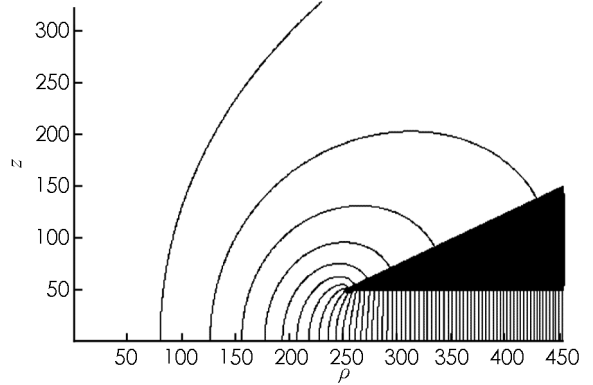


图 4 极间电力线(等通量  $\Phi$  密度)分布

注意, 旋转对称场需加面积因子  $\rho^2$ , 其等通量密度线(管面)分布才与传统的场力线表示一致. 由图 4 可见场分布在电极小园孔中心较均匀平缓, 边缘锐角处较为奇异, 增大了激光触发运行的难度, 需作专门处理<sup>[10]</sup>.

图 5 是内置周期环状金催化剂的  $\text{CO}_2$  激光器放电管内相继 3 个环间及管玻璃壳内的电势分布立体图, 图 6 是其各点场强的点矢量表示, 是利用已得到的相邻点的电位值及点间距离, 求出差商而得各点场强的正交分量, 再求其矢量和得出场强的大小和方向, 再据此画出小箭头显示各点的场强方向, 显然其可视性较差, 不易直接看出场强分布的大小和走向, 与传统的图线表示要求相去甚远; 图 7 是相应的按标量场  $\Phi$  等值线绘制的电力线簇, 均用普通 PC 机 Fortran 编程计算并由 Graphtools 绘制. 图 7 展示出置入周期金环后激光器放电腔内场分布明显不均匀, 对等离子体效率、激光工质激励输运等产生较大影响, 环边缘附近较大的奇异性易导致击穿, 器件工作需严格控制.

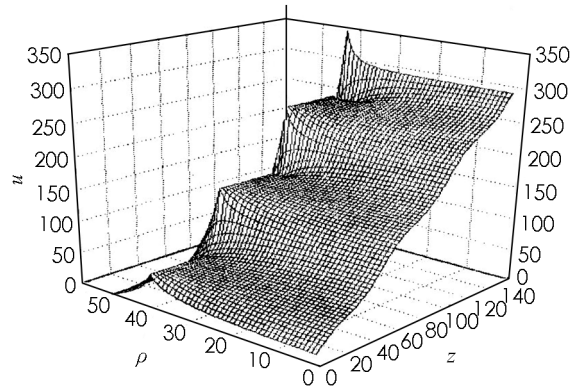


图 5 内置环状金催化剂的  $\text{CO}_2$  激光器放电管中 3 个金环周期的电势分布立体图

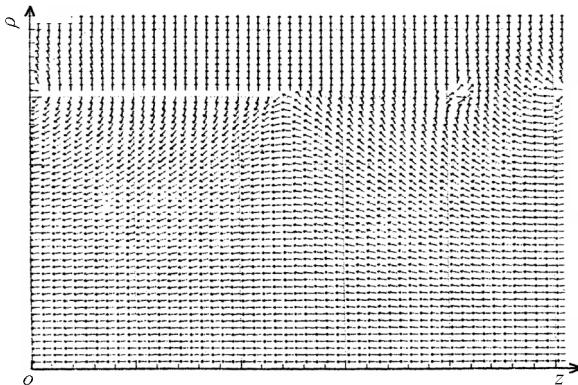


图 6 内置环状金催化剂的  $\text{CO}_2$  激光器中一个金环周期内  $E$  的点矢量表示

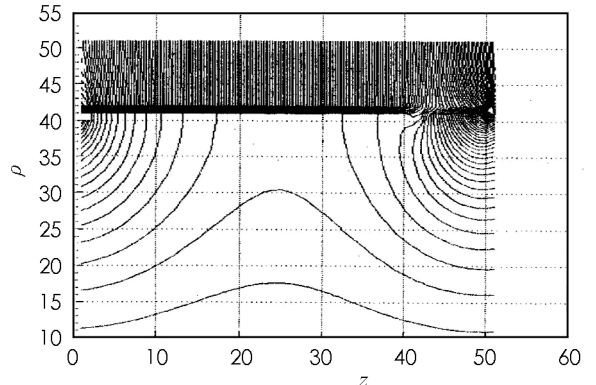


图 7 按标量场  $\Phi$  等值线绘制的一个金环周期内的电力线簇

### 3 结 论

场向量的直观表示是一个朴素而不太好解决的经典问题. 三维空间分布的二维可视化表示原则上非常困难. 习惯描绘的朴素要求并不太容易实现, 各种实际问题往往采用不同的变通办法. 经典的物理思想和从头计算原则以及数值模拟方法具有相当的基础普适性, 事实上已为不少学科的发展提供了新的方向和契机. 构建(相对)通量分布标量形式的向量场, 利用现代高度发展的计算机技术, 可较好地解决平行平面场和旋转对称场的问题, 相对其它方法有一定的优势, 不失为多种实际问题求解、检验及参照讨论的一种有价值的手段. 对相关物理问题的教学演示、帮助理解也有实用的意义.

#### 参考文献:

- [1] 刘健平. 论麦克斯韦方程组的美 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2008, 33(6): 135—140.
- [2] 梁昆森. 数学物理方法 [M]. 人民教育出版社, 1979.
- [3] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学 [M]. 人民教育出版社, 1978.
- [4] 张三惠. 大学物理学 [M]. 清华大学出版社, 1999.
- [5] 沙振舜, 范家师. 电磁学实验 [M]. 上海科学技术出版社, 1988.
- [6] 董小刚. 加金催化剂的 CO<sub>2</sub> 激光器设计制作及特性研究 [D]. 成都: 西南交通大学, 1997.
- [7] 童林凤, 西门纪业, 丁守谦. 电子光学计算机辅助设计 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1990.
- [8] 周卫东. 测量等离子体密度的多幅激光干涉仪 [D]. 北京: 清华大学, 1988.
- [9] 何红雨, 保宗梯, 陆 晓. 正六边形二维场域电位的有限差分算法 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2004, 29(5): 831—835.
- [10] 董小刚, 李良钰, 晏思贤. 调 Q 激光自触发斩波产生纳秒脉宽单脉冲激光 [J]. 中国激光, 2007, 34(4): 465—469.

## Expressing in Scalar and Drawing of Electro-Lines on Simple-Connected Vortex-Free Vector Field

DONG Xiao-gang<sup>1</sup>, LI Lan-xiu<sup>2</sup>, ZHU Hai-jun<sup>1</sup>, ZOU Xiao-bing<sup>3</sup>

1. Department of Control Engineering, Academy of Armored Forces Engineering, Beijing 100072, China;

2. Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

3. Electrical Engineering & Applied Electronics Department, Tsinghua University, Beijing 100084, China

**Abstract:** For indicating conveniently and depicting in traditional form of the vector field, based on the ideas of the classical physics and the calculations from the beginning, the vector field in the form of scalar was built with the technologies of numerical simulations and modern computer. The switch of nanosecond pulse of laser beam and the discharge capillary of CO<sub>2</sub> laser with gold series-rings been as the examples and their boundary question of vortex-free vector field in simple-connected region concerned, the scalar building of vector field and customary visualizing of vector distributions in the field were discussed both in the cases of plane scalar and rotational symmetrical field and, in the foundation of field potential resolved. An effective method was realized and provided for the accurate and objective depictions of field vectors.

**Key words:** scalar expression; numerical simulation; laser devices; electro-lines depicting