文章编号:1000-5471(2011)03-0054-06

毒素对阶段结构的单种群持续生存的影响①

陈 显, 王稳地, 陈晓平

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 基于传统的毒素模型和阶段结构种群模型提出了一个新的数学模型来描述污染环境中结构单种群的动力学. 从毒素和种群密度依赖法则来考虑未成熟个体和成熟个体的死亡率,得到了结构种群持久存在和灭绝的阈值条件.

关 键 词: 阶段结构;全局稳定性;李雅普诺夫函数;持久;毒素

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A

近些年来,已有一些就有害物体对单一物种数量的影响的调查研究成果,且许多学者已采用数学模拟方法来研究环境污染对生态数量存活情况的影响. 早在20世纪80年代,Hallam[1-2] 和他的同事就已经提出采用各种不同数学模型分析研究有害物体对生态数量的影响. 20世纪90年代,Freedman和Shukla[3] 着手研究有害物体作为外部资源对单个物种和猎食群落的影响. 他们发现生态物种生长率和环境承载量与有毒物体含量成递减函数关系. Shukla 和 Agarwal[4] 也研究了两个相互竞争的物种在一个受污染的环境中的存活情况. 他们发现随着有害物散发到环境中的速率增加,两种物种的数量密度成均衡水平的减少. 因此,研究有害物体对全球生态物体数量持续、稳定发展的影响是十分重要的.

本文研究了有毒物体排放率为常量的情况下,单一物种的数量在两个生命阶段(未成年和成年阶段)的变化情况,利用三个微分方程组系统模拟了生物数量与有害物体的相互关系,并研究了通过控制毒素的排放率来达到控制种群规模的问题.

1 模型描述

将一个单种群划分为成年个体和未成年个体两个部分[3]. 令 $x_i(t)$ 和 $x_m(t)$ 分别表示成熟个体和未成熟个体在 t 时刻的密度,$T(t)$ 表示时刻 t 环境毒素的浓度.

建立如下模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=(\alpha_0-\alpha_1 T(t))x_m(t)-\delta x_i(t)-(\beta_0+\beta_1 T(t))x_i(t)-d_1(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_i(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}x_m(t)}{\mathrm{d}t}=\delta x_i(t)-(\beta_2+\beta_3 T(t))x_m(t)-d_2(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_m(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=Q-(\delta_0+\delta_1 x_i(t)+\delta_2 x_m(t))T(t)\end{cases}$$

其中:α_0 表示未成年个体的自然出生率;α_1 表示单位毒素对成年个体出生率的影响(必须满足 $\alpha_0>\alpha_1 Q/\delta_0$,否则种群必然灭绝);$\beta_0$ 和 β_2 分别表示未成年个体和成年个体的死亡率;$\beta_1 T x_i$,$\beta_3 T x_m$ 分别表示环境中的毒素导致未成年个体和成年个体的死亡率;δ 表示未成年个体向成年个体的转化率;$d_1(x_i(t)+\alpha$

---

① 收稿日期:2010-07-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10871162).

作者简介:陈 显(1984-),男,江西南昌人,硕士研究生,主要从事生物数学的研究.

通信作者:王稳地,教授,博士生导师.

$x_m(t))x_i(t)$ 和 $d_2(x_i(t)+\alpha x_m(t))\,x_{m(t)}$ 分别表示未成年个体和成年个体的环境制约；$Q>0$ 是环境中毒素的输入率，设为一个常数；$\delta_0 T(t)$ 表示环境对毒素的净化率；$\delta_1 T(t)$ 和 $\delta_2 T(t)$ 分别表示未成年个体和成年个体对毒素的吸收率.

环境中的初始状态 $x_i(0)\geqslant 0$，$x_m(0)\geqslant 0$，$Q/\delta_0\geqslant T(0)\geqslant 0$，而且所有的系数都是非负的. 易知系统(1) 在上述的初始状态下的解肯定也是非负的，即集合 $L_1=\{(x_i, x_m, T): x_i\geqslant 0, x_m\geqslant 0, T\geqslant 0\}$ 是系统(1) 的一个不变集.

引理 1　系统(1) 的所有非负解都是最终有界的.

证　由系统(1) 的第三个方程，可以得到$\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant Q-\delta_0 T(t)$.

根据比较定理有 $T(t)\leqslant\dfrac{Q}{\delta_0}$，$t\to\infty$. 定义一个新的函数 $w(t)=x_i(t)+x_m(t)$，$t\in[0,+\infty)$. 计算 $w(t)$ 沿着系统(1) 的导数得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=&(\alpha_0-\alpha_1 T(t))x_m(t)-(\beta_0+\beta_1 T(t))x_i(t)-d_1(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_i(t)-\\&(\beta_2+\beta_3 T(t))x_m(t)-d_2(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_m(t)\leqslant\\&\alpha_0 x_m(t)-d_1 x_i^2(t)-d_2\alpha x_m^2(t)\end{aligned}$$

令 $\beta=\min\left\{\dfrac{\alpha_0+1}{\alpha d_2},\dfrac{1}{d_1}\left(\dfrac{\alpha_0+1}{\alpha d_2}+1\right)\right\}$. 当 $w\geqslant 2\beta$ 时，由于式子(2)，可知$\dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\beta$. 当时间 t 趋于无穷大的时候，有 $w(t)\leqslant 2\beta$.

证明完毕.

2　边界平衡点的稳定性

显然，$E_0(0,0,\dfrac{Q}{\delta_0})$ 是系统(1) 的边界平衡点. 为了确定这个平衡点的局部稳定性，先计算系统(1) 在点 $E_0(0,0,Q/\delta_0)$ 的雅克比矩阵：

$$\begin{pmatrix}-\beta_0-\beta_1\dfrac{Q}{\delta_0}-\delta & \alpha_0-\alpha_1\dfrac{Q}{\delta_0} & 0\\ \delta & -\beta_2-\beta_3\dfrac{Q}{\delta_0} & 0\\ -\delta_1\dfrac{Q}{\delta_0} & -\delta_2\dfrac{Q}{\delta_0} & -\delta_0\end{pmatrix}$$

定理 1　如果

$$\alpha_0>\frac{(\beta_2+\beta_3\frac{Q}{\delta_0})(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)}{\delta}+\alpha_1\frac{Q}{\delta_0}\tag{3}$$

那么 $E_0(0,0,\dfrac{Q}{\delta_0})$ 是不稳定的；如果

$$\alpha_0<\frac{(\beta_2+\beta_3\frac{Q}{\delta_0})(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)}{\delta}+\alpha_1\frac{Q}{\delta_0}\tag{4}$$

那么 $E_0(0,0,\dfrac{Q}{\delta_0})$ 是渐进稳定的. 如果条件加强，

$$\zeta\left(\delta_1+\sqrt{\frac{\delta d_1}{(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)d_2\alpha}}\delta_2\right)<\frac{\delta d_1\delta_0^2}{Q}\tag{5}$$

其中 $\zeta=\sqrt{\dfrac{\delta d_1}{(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)d_2\alpha}}\dfrac{\delta\alpha_1+(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)\beta_3}{2}+\delta\beta_1>0$，那么，$E_0(0,0,\dfrac{Q}{\delta_0})$ 是全局渐进稳定的.

证　可以算出平衡点 $E_0(0,0,\frac{Q}{\delta_0})$ 的雅克比矩阵的特征方程如下

$$H_1(\lambda)=(\lambda+\delta_0)[\lambda^2+(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta+\beta_2+\beta_3\frac{Q}{\delta_0})\lambda+(\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta)(\beta_2+\beta_3\frac{Q}{\delta_0})-(\alpha_0-\alpha_1\frac{Q}{\delta_0})\delta]=0$$

如果条件(3)成立，那么 E_0 是一个鞍点，而且 $\dim W^u(E_0)=1$，$\dim W^s(E_0)=2$，E_0 是不稳定的；如果条件(4)成立，则上述的特征方程的特征根都有负实部，E_0 是渐进稳定的.

下面，构建一个李雅谱若夫函数

$$V_1(t)=k_1x_i(t)+k_2x_m(t)+k_3\left(T(t)-\frac{Q}{\delta_0}-\frac{Q}{\delta_0}\ln\frac{T(t)}{\frac{Q}{\delta_0}}\right)$$

令 $k_1=\delta$，$k_2=\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0}+\delta$，$k_3>0$ 是一个待定的参数. 计算李雅谱若夫函数 $V_1(t)$ 沿着系统(1)解的导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant&-k_1\left(d_1(x_i(t))^2+\alpha_1(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})x_m(t)+\beta_1(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})x_i(t)\right)-\\&k_2\left(d_2\alpha(x_m(t))^2+\beta_3(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})x_m(t)\right)-\\&k_3\left(\frac{\delta_0^2(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})^2}{Q}+\delta_1(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})x_i(t)+\delta_2(T(t)-\frac{Q}{\delta_0})x_m(t)\right)+\\&[\delta(\alpha_0-\alpha_1\frac{Q}{\delta_0})-(\delta+\beta_0+\beta_1\frac{Q}{\delta_0})(\beta_2+\beta_3\frac{Q}{\delta_0})]x_m(t)-\\&k_1\,d_1\alpha\,x_i(t)\,x_m(t)-k_2\,d_2\,x_i(t)\,x_m(t)\end{aligned}$$

接下来证明存在一个正数 k_3，使得函数 $f(x,y,z)$ 是一个正定函数，

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&k_1(d_1x^2+\alpha_1zy+\beta_1zx)+\\&k_2(d_2\alpha y^2+\beta_3zy)+k_3\left(\frac{\delta_0^2z^2}{Q}+\delta_1zx+\delta_2zy\right)\end{aligned}$$

若

$$g(k_3)\triangleq k_2d_2\alpha\left[k_1d_1\frac{\delta_0^2z^2}{Q}k_3-\frac{k_1d_1}{k_2d_2\alpha}\left(\frac{k_1\alpha_1+k_2\beta_3+\delta_2k_3}{2}\right)^2-\left(\frac{k_1\beta_1+\delta_1k_3}{2}\right)^2\right]>0$$

则很容易证明 $f(x,y,z)$ 是正定函数.

现在证明 $g(k_3)>0$. 令 $A_1=\frac{k_1d_1}{k_2d_2\alpha}$，$B_1=\frac{\delta_2}{2}$，$C_1=\frac{k_1\alpha_1+k_2\beta_3}{2}$，$D_1=\frac{\delta_1}{2}$，$F_1=\frac{k_1\beta_1}{2}$，$\eta=\frac{k_1d_1\delta_0{}^2}{Q}$，则

$$\begin{aligned}g(k_3)=&\eta k_3-A_1(B_1k_3+C_1)^2-(D_1k_3+F_1)^2=-\\&(A_1B_1{}^2+D_1{}^2)k_3{}^2-(2A_1B_1C_1+2D_1F_1-\eta)k_3-(A_1C_1{}^2+F_1{}^2)\end{aligned}$$

要证明存在正数 k_3 使得 $g(x)|_{x=k_3}>0$，必须有

$$2A_1B_1C_1+2D_1F_1-\eta<0,$$

$$\begin{aligned}\triangle=&(2A_1B_1C_1+2D_1F_1-\eta)^2-4(A_1B_1^2+D_1^2)(A_1C_1^2+F_1^2)=\\&\eta^2-4(A_1B_1C_1+D_1F_1)\eta-4A_1(B_1F_1-C_1D_1)^2>0\end{aligned}$$

则下面条件必须成立

$$\eta>2(A_1B_1C_1+D_1F_1)+2\sqrt{(A_1B_1C_1+D_1F_1)^2+A_1(B_1F_1-C_1D_1)^2}$$

而由条件(5)，有

$$\begin{aligned}\eta>&4(A_1B_1C_1+D_1F_1)+2\sqrt{A_1}(B_1F_1+C_1D_1)>\\&2(A_1B_1C_1+D_1F_1)+2\sqrt{(A_1B_1C_1+D_1F_1)^2+A_1(B_1F_1-C_1D_1)^2}\end{aligned}$$

故存在一个正数 k_3 使得函数 $f(x,y,z)$ 是正定函数. 所以，若条件(4)和(5)成立，则可以得到 $\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$.

因此，

$$D_3=\left\{(x_i,x_m,T)\in L_1:\frac{\mathrm{d}V_1(t)}{\mathrm{d}t}=0\right\}=\left\{(x_i,x_m,T)\in L_1:x_i=x_m=0,T=\frac{Q}{\delta_0}\right\}$$

根据 LaSalle 不变集原理，平衡点 E_0 是全局渐进稳定的. 证明完毕.

3　持久性

考虑如下一个模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=(\alpha_0-\alpha_1\dfrac{Q}{\delta_0})x_m(t)-\delta x_i(t)-(\beta_0+\beta_1\dfrac{Q}{\delta_0})x_i(t)-d_1(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_i(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}x_m(t)}{\mathrm{d}t}=\delta x_i(t)-(\beta_2+\beta_3\dfrac{Q}{\delta_0})x_m(t)-d_2(x_i(t)+\alpha x_m(t))x_m(t)\end{cases}\tag{6}$$

显然，集合 $L_2=\{(x_i,x_m):x_i\geqslant 0,x_m\geqslant 0\}$ 是系统(6) 的一个不变集.

定理 2　如果条件(3) 成立，那么系统(6) 有唯一全局渐进稳定的正平衡点.

证　为简化，令 $a_1=\alpha_0-\alpha_1\dfrac{Q}{\delta_0}$，$b_1=\beta_0+\beta_1\dfrac{Q}{\delta_0}+\delta$，$a_2=\beta_2+\beta_3\dfrac{Q}{\delta_0}$. 易证明 $a_1>0$，$b_1>0$，$a_2>0$. 那么系统(6) 可以改写如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=a_1x_m(t)-b_1x_i(t)-d_1x_i^2(t)-d_1\alpha x_i(t)x_m(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}x_m(t)}{\mathrm{d}t}=\delta x_i(t)-a_2x_m(t)-d_2x_i(t)x_m(t)-d_2\alpha x_m^2(t)\end{cases}\tag{7}$$

求解系统(6) 的平衡点可通过求解系统(7) 的代数方程，也就是令$\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x_m(t)}{\mathrm{d}t}=0$，即：

$$a_1x_m-b_1x_i-d_1x_i^2-d_1\alpha x_ix_m=0$$
$$\delta x_i-a_2x_m-d_2x_ix_m-d_2\alpha x_m^2=0$$

再令

$$l_1:a_1x_m=b_1x_i-d_1x_1^2-d_1\alpha x_ix_m$$
$$l_2:\delta x_i=a_2x_m-d_2x_ix_m-d_2\alpha x_m^2$$

在条件(3) 下，系统(7) 有一个边界平衡点 $E_0(0,0)$ 和一个正平衡点 $E_1(x_i^*,x_m^*)$. $E_0(0,0)$ 是不稳定的.

下面证明正平衡点 $E_1(x_i^*,x_m^*)$ 是全局渐进稳定的. 系统(7) 可以进行如下变形

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\dfrac{a_1}{x_i^*}[-x_m(x_i-x_i^*)+x_i(x_m-x_m^*)]-d_1x_i(x_i-x_i^*)-d_1\alpha x_i(x_m-x_m^*)\\ \dot{x}_m=\dfrac{\delta}{x_m^*}[-x_i(x_m-x_m^*)+x_m(x_i-x_i^*)]-d_2x_m(x_i-x_i^*)-d_2\alpha x_m(x_m-x_m^*)\end{cases}$$

构造如下的一个李雅谱若夫函数

$$V(t)=c_1(x_i-x_i^*-x_i^*\ln\frac{x_i}{x_i^*})+c_2(x_m-x_m^*-x_m^*\ln\frac{x_m}{x_m^*})$$

其中 c_1，c_2 是待定系数. 沿着系统(7) 的解对函数 $V(t)$ 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}&=c_1\frac{(x_i-x_i^*)}{x_i(t)}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}+c_2\frac{(x_m-x_m^*)}{x_m(t)}\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t}=\\&-d_1c_1(x_i-x_i^*)^2-d_2\alpha c_2(x_m-x_m^*)^2-\\&\frac{c_1a_1}{x_i^*}\frac{x_m}{x_i}(x_i-x_i^*)^2-\frac{c_2\delta}{x_m^*}\frac{x_i}{x_m}(x_m-x_m^*)^2+\\&\left(\frac{c_1a_1}{x_i^*}+\frac{\delta c_2}{x_m^*}-d_1\alpha c_1-d_2c_2\right)(x_i-x_i^*)(x_m-x_m^*)\end{aligned}$$

令 $c_2=1$，$c_1=\dfrac{D-2AB+\sqrt{D(D-4AB)}}{2A}$，其中 $A=\dfrac{a_1-d_1\alpha x_i^*}{x_i^*}>0$，$B=\dfrac{\delta-d_2x_m^*}{x_m^*}>0$，$D=\dfrac{4a_1\delta}{x_i^*x_m^*}>0$.

$$D-2AB=\frac{4a_1\delta}{x_i^*x_m^*}-\frac{2(a_1-d_1\alpha x_i^*)}{x_i^*}\frac{\delta-d_2x_m^*}{x_m^*}=$$

$$\frac{2}{x_i^* x_m^*}(a_1\delta + d_1\alpha\delta x_i^* + d_2(b_1 x_i^* + d_1(x_i^*)^2)) > 0$$

$$D - 4AB = \frac{2}{x_i^* x_m^*}(d_1\alpha\delta x_i^* + d_2(b_1 x_i^* + d_1(x_i^*)^2)) > 0$$

因 $c_1 > 0$，$c_2 > 0$. 所以可求得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = &-\left(\sqrt{\frac{c_1 a_1}{x_i^*}\frac{x_m}{x_i}}(x_i - x_i^*) - \sqrt{\frac{\delta}{x_m^*}\frac{x_i}{x_m}}(x_m - x_m^*)\right)^2 - \\ &d_1c_1(x_i - x_i^*)^2 - d_2\alpha(x_m - x_m^*)^2 \leqslant \\ &-d_1c_1(x_i - x_i^*)^2 - d_2\alpha(x_m - x_m^*)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

记 $E = \{(x_i, x_m): (x_i, x_m) \in L_2, \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}|_{(7)} = 0\} = \{(x_i, x_m) \in L_2: x_i = x_i^*, x_m = x_m^*\}$.

由 LaSalle 不变集原理，可证明点 E_1 是全局渐进稳定的.

考虑系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(y) \tag{9}$$

其中 f 和 g 是连续的，$f(t, x)$ 关于 x 满足局部利谱希茨条件，$g(y)$ 关于 y 满足局部利谱希茨条件，所以方程(8)和(9)存在解. 方程(8)被称为具有极限方程(9)的渐近自治方程，如果满足对所有的 $x \in \mathbb{R}$，当 $t \to \infty$ 时 $f(t, x)$ 一致地趋于 $g(x)$.

引理 2[5] 令 e^* 是方程(9)的局部渐进稳定平衡点，ω 是方程(8)的有界解 $x(t)$ 的 ω-极限集. 若 ω 包含一点 y_0，满足 $y(0) = y_0$(其中 $y(t)$ 是方程(9)的解，且 $y(t)$ 收敛于 e^*)，那么 $\omega = \{e^*\}$，即当 $t \to \infty$，$x(t) \to e^*$.

接下来证明：若假设(3)成立，则这个结构种群就是一致持久的.

定理 3 若条件(3)成立，那么存在一个 $\epsilon > 0$ 使得系统(1)的任何一个正解$(x_i(t), x_m(t), T(t))$都有

$$\liminf_{t\to\infty} x_i(t) \geqslant \epsilon, \ \liminf_{t\to\infty} x_m(t) \geqslant \epsilon$$

证 定义

$$X = \left\{(x_i, x_m, T) \in \mathbb{R}_+^3: x_i \geqslant 0, x_m \geqslant 0, 0 \leqslant T \leqslant \frac{Q}{\delta}\right\}$$

$$\partial X = \{(x_i, x_m, T) \in X: x_i = 0 \text{ 或 } x_m = 0\}$$

$$X_0 = X \backslash \partial X$$

首先，不难验证 X 为正不变集，而且 ∂X 在 X 中是相对闭的. 引理1显示系统(1)是点耗散的.

令 $M_\partial = \{(x_i(t), x_m(t), T(t)): (x_i(t), x_m(t), T(t))$ 满足系统(1)而且$(x_i(t), x_m(t), T(t)) \in \partial X$, $\forall t \geqslant 0\}$. 同样不难证明 $M_\partial = \left\{(0, 0, T): 0 \leqslant T \leqslant \frac{Q}{\delta_0}\right\}$.

容易知道在 M_∂ 内，$E_0(0, 0, \frac{Q}{\delta_0})$是唯一的平衡点. 设 $\Gamma(t) := (x_i(t), x_m(t), T(t))$是系统(1)任意一个正解. 现在需证明

$$\limsup_{t\to\infty} \max_j \{x_i(t), x_m(t)\} > 0 \tag{10}$$

假设上式不成立，则有

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} x_m(t) = 0 \tag{11}$$

根据系统(1)的第三个方程，得到$\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \frac{Q}{\delta_0}$.

因此，对于解 $\Gamma(t)$ 而言，系统(6)是系统(1)的极限系统. 由定理2知 $E_1(x_i^*, x_m^*)$是全局渐进稳定的. 因为 $E_{00}(0, 0)$ 排斥系统(6)的正解，那么系统(6)正解 $\Gamma(t)$ 的 ω-极限集包含一点 y_0 使得其正向轨道 $\gamma(y_0)$ 收敛于 $E_1(x_i^*, x_m^*)$. 由引理2知当 $t \to \infty$ 时

$$\Gamma(t) \to (x_i^*, x_m^*, \frac{Q}{\delta_0})$$

这跟(11)式矛盾．所以，(10)式得证，而且 $W^s(E_0)\cap X_0=\varnothing$．因为 E_0 在 M_∂ 中是全局稳定的，根据(10)式可知 E_0 是孤立的不变集且是非循环的．由文献[6]的定理4.6知：系统(1)从 X_0 中出发的解一致排斥 ∂X．证明完毕．

4 讨　论

研究了阶段结构的种群在毒素影响下的灭绝与持久生存的问题，获得了阶段结构种群灭绝和持久生存的阈值．在此模型中，环境中毒素的输入率被假设为一个定值．未来的工作将考虑环境中毒素的输入率波动变化的情况．

参考文献：

[1] HALLAM T G，CLARK C E，LASSITER R R. Effects of Toxicants on Populations：A Qualitative Approach I. Equilibrium Environmental Exposure [J]. Ecol Model，1983，8(1)：291－304.

[2] HALLAM T G，CLARKE C E，JORDAN G S. Effects of Toxicants on Populations：A Qualitative Approach II，First Order Kinetics [J]. J Math Biol，1983，18(2)：25－37.

[3] FREEDMAN H I，SHUKLA J B. Models for the Effect of Toxicant in Single Species and Predator-prey System [J]. J Math Biol，1991，30(1)：15－30.

[4] SHUKLA J B，AGARWAL A K，DUBEY B，et al. Existence and Survival of Two Competing Species in a Polluted Environment：A Mathematical Model [J]. J Biol Systems，2001，9(2)：89－103.

[5] THIEME H R. Convergence Results and a Poincare-Bendixson Trichotomy for Asymptotically Autonomous Differential Equations [J]. J Math Biol，1992，30(11)：755－763.

[6] THIEME H R. Persistence Under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. SIAM J Math Anal，1993，24(2)：407－435.

[7] XIAO Yan-ni，CHEN Lan-sun. Effects of Toxicants on a Stage-Structured Population Growth Model [J]. Applied Mathematics and Computation，2001，123：63－73.

[8] WANG Wen-di，CHEN Lan-sun. A Predator-Prey System with Stage-Structure for Predator [J]. Comput Math Appl，1997，33(8)：83－91.

[9] 马知恩．种群生态学的数学建模与研究 [M]．合肥：安徽教育出版社，1996：169－301.

[10] 王稳地．一个带时滞的离散模型的一致持续生存 [J]．西南师范大学学报：自然科学版，1992，17(1)：13－18.

[11] ZHOU Rui，WANG Wen-di. Persistence and Extinction of Disease in Infected Prey [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(4)：15－20.

Effects on Survival of Stage-Structured Single Population with Toxicant

CHEN　Xian，　WANG Wen-di，　CHEN Xiao-ping

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing，400715，China

Abstract：Based on the traditional toxicant model and the structured population model，the authors propose a new mathematical model to describe the dynamics of a single population in the polluted environment. Considering the mortalities of immature and mature individuals from toxicant and the density-dependent regulations，the authors obtain the threshold conditions for the persistence and extinction of the structured population.

Key words：stage-structure；global stability；Liapunov function；persistence；toxicant

责任编辑　张　枸