第 36 卷 第 3 期　西南师范大学学报（自然科学版）　2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jun. 2011

文章编号：1000－5471(2011)03－0051－03

Quantale 中的模糊理想[①]

马　崛[1]，　周异辉[2]

1. 榆林学院 数学系，陕西 榆林 719000；2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062

摘要： 首先给出了 Quantale 中模糊理想的概念. 其次，研究了 Quantale 中模糊理想的性质，得出了 Quantale 中模糊理想与理想之间的关系. 最后给出 Quantale 中模糊理想扩张的定义，并研究了其性质，得到了在 Quantale 中模糊理想的扩张还是模糊理想的结论.

关　键　词： 模糊理想；理想；模糊理想扩张

中图分类号： O189.13　　**文献标志码：** A

Quantale 的概念是 1986 年由文献[1] 提出的，其目的是给量子力学提供新的数学模型. 此后人们发现 Quantale 在 C^* - 代数、环及环的谱[2] 中有重要作用. 本文旨在对 Quantale 中的模糊理想作一些基本的研究，给出 Quantale 中模糊理想及其扩张的概念，研究 Quantale 中模糊理想及其扩张的性质. 文章涉及到的 Quantale 理论和模糊理论的概念及其性质请参考文献[2－3].

1　Quantale 中模糊理想的概念

由文献[3－4] 的思想，可以给出如下定义：

定义 1　设 Q 为 Quantale，S 是 Q 的非空子集，若 S 满足：

(a) 对任意的 $a \in Q$，$b \in S$，若 $a \leqslant b$，则 $a \in S$；

(b) 对任意的 $a \in Q$，$b \in S$，有 $a \& b \in S$.

则称 S 是 Q 的左理想. 类似地，可定义 Quantale 的右理想. 若 S 既是 Q 的左理想又是右理想，则 S 是 Q 的理想.

定义 2　设 Q 为 Quantale，$f \in F(Q)$，如果 f 满足下列条件：

(a) 对任意的 $x, y \in Q$，$x \leqslant y$ 可推得 $f(x) \geqslant f(y)$；

(b) 对任意的 $x, y \in Q$，有 $f(x \& y) \geqslant f(y)$.

则称 f 是 Q 的模糊左理想.

定义 3　设 Q 为 Quantale，$f \in F(Q)$，如果 f 满足下列条件：

(a) 对任意的 $x, y \in Q$，$x \leqslant y$ 可推得 $f(x) \geqslant f(y)$；

(b) 对任意的 $x, y \in Q$，有 $f(x \& y) \geqslant f(x)$.

则称 f 是 Q 的模糊右理想.

若 f 既是 Q 的模糊左理想，又是 Q 的模糊右理想，则称 f 是 Q 的模糊理想. 由定义 2、定义 3 及模糊理想的定义可得如下命题：

命题 1　设 Q 为 Quantale，$f \in F(Q)$，f 是 Q 的模糊理想当且仅当下列条件成立：

(a) 对任意的 $x, y \in Q$，$x \leqslant y$ 可推得 $f(x) \geqslant f(y)$；

(b) 对任意的 $x, y \in Q$，有 $f(x \& y) \geqslant f(x) \vee f(y)$.

---

① 收稿日期：2010－10－11

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10871121)；榆林学院高层次人才科研启动金(10GK24).

作者简介：马　崛(1981－)，女，陕西榆林人，助教，主要从事格上拓扑与模糊推理的研究.

2 Quantale 中模糊理想的性质

定理 1 设 Q 为 Quantale，$f,g \in F(Q)$ 是 Q 的模糊理想，则 $f \cap g$ 也是 Q 的模糊理想.

证 (i) $f \cap g$ 保逆序. 设 $x,y \in Q$，$x \leqslant y$，则由 $f,g \in F(Q)$ 是 Q 的模糊理想知，f,g 保逆序. 故有 $f(x) \geqslant f(y)$，$g(x) \geqslant g(y)$. 所以 $(f \cap g)(x) = f(x) \wedge g(x) \geqslant f(y) \wedge g(y) = (f \cap g)(y)$. 所以 $f \cap g$ 保逆序.

(ii) 设 $x,y \in Q$，则 $(f \cap g)(x \& y) = f(x \& y) \wedge g(x \& y) \geqslant (f(x) \vee f(y)) \wedge (g(x) \vee g(y)) \geqslant f(x) \wedge g(x)$，$f(y) \wedge g(y) = (f \cup g)(x) \vee (f \cap g)(y)$. 所以 $f \cap g$ 也是 Q 的模糊理想.

类似地可证下列定理 2 成立.

定理 2 设 Q 为 Quantale，$f,g \in F(Q)$ 是 Q 的模糊理想，则 $f \cup g$ 也是 Q 的模糊理想.

定理 3 设 Q 为 Quantale，$\varnothing \neq I \subseteq Q$，则 I 是 Q 的左理想当且仅当 f_I 是 Q 的模糊左理想.

证 必要性. 设 I 是 Q 的左理想.

(i) f_I 保逆序. 设 $x,y \in Q$，$x \leqslant y$. 若 $y \notin I$，则 $f_I(x) \geqslant 0 = f_I(y)$. 若 $y \in I$，则由 I 是左理想知，I 是下集，从而 $x \in I$. 所以 $f_I(x) = 1 \geqslant f_I(y)$. 即 f_I 保逆序.

(ii) 设 $x,y \in Q$. 若 $x \notin I$，但 $y \in I$，则由 I 是左理想知 $x \& y \in I$. 从而 $f_I(x \& y) = 1 \geqslant f_I(y)$；若 $x \in I$，但 $y \notin I$，则 $f_I(y) = 0$，所以 $f_I(x \& y) \geqslant 0 = f_I(y)$；若 x 和 y 都不在 I 中，则 $f_I(x) = 0 = f_I(y)$. 从而 $f_I(x \& y) \geqslant 0 = f_I(y)$. 综上可知 f_I 是 Q 的模糊左理想.

充分性. 设 f_I 是 Q 的模糊左理想.

(i) I 是左吸收的. 设 $x \in Q$，$y \in I$，则 $f(y) = 1$. 由 f_I 是 Q 的模糊左理想知 $f(x \& y) \geqslant f(y) = 1$，所以 $f(x \& y) = 1$，即有 $x \& y \in I$. 所以 I 是左吸收的.

(ii) I 是下集. 设 $x \in Q$，$y \in I$ 且 $x \leqslant y$. 由 $y \in I$ 知 $f(y) = 1$. 又由 f_I 是 Q 的模糊左理想知 f_I 保逆序. 所以 $f(x) \geqslant f(y) = 1$. 从而 $f(x) = 1$. 所以 $x \in I$. 所以 I 是下集. 综上可知 I 是 Q 的左理想.

类似地，上述结论对右理想也成立.

定理 4 设 Q 为 Quantale，$\varnothing \neq I \subseteq Q$，则 I 是 Q 的右理想当且仅当 f_I 是 Q 的模糊右理想.

由定理 3 和定理 4 可得下列结论：

定理 5 设 Q 为 Quantale，$\varnothing \neq I \subseteq Q$，则 I 是 Q 的理想当且仅当 f_I 是 Q 的模糊理想.

3 Quantale 中模糊理想的扩张

由文献[3-4]的思想，可给出如下定义：

定义 4 设 Q 为 Quantale，$f \in F[Q]$，$x \in Q$，定义 Q 的模糊子集 $\langle f, x\rangle : Q \longrightarrow [0, 1]$ 为：对任意的 $y \in Q$，有 $\langle f, x\rangle(y) = f(y \& x)$. 则称 $\langle f, x\rangle$ 为 f 关于 x 的左扩张.

定义 5 设 Q 为 Quantale，$f \in F[Q]$，$x \in Q$，定义 Q 的模糊子集 $\langle x, f\rangle : Q \longrightarrow [0, 1]$ 为：对任意的 $y \in Q$，有 $\langle x, f\rangle(y) = f(x \& y)$. 则称 $\langle x, f\rangle$ 为 f 关于 x 的右扩张.

定义 6 设 Q 为 Quantale，$f \in F[Q]$，$x \in Q$，若 f 关于 x 的左扩张等于 f 关于 x 的右扩张，则称之为 f 关于 x 的扩张，记为 $\langle f\rangle_x$.

定理 6 设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊左理想，$x \in Q$，则 f 关于 x 的左扩张 $\langle f, x\rangle$ 也是 Q 的模糊左理想.

证 (i) $\langle f, x\rangle$ 保逆序. 设 $a,b \in Q$ 且 $a \leqslant b$，则 $a \& x \leqslant b \& x$. 因为 f 是 Q 的模糊左理想，则 $f(a \& x) \geqslant f(b \& x)$，所以 $\langle f, x\rangle(a) = f(a \& x) \geqslant f(b \& x) = \langle f, x\rangle(b)$，即 $\langle f, x\rangle$ 保逆序.

(ii) 设 $a,b \in Q$，则 $\langle f, x\rangle(a \& b) = f((a \& b) \& x) = f(a \& (b \& x)) \geqslant f(b \& x) = \langle f, x\rangle(b)$. 所以 $\langle f, x\rangle$ 也是 Q 的模糊左理想.

类似地可证定理 7.

定理 7 设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊右理想，$x \in Q$，则 f 关于 x 的右扩张 $\langle x, f\rangle$ 也是 Q 的模糊右理想.

定理 8 设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊理想，$x \in Q$，则 f 关于 x 的扩张 $\langle f\rangle_x$ 也是 Q 的模糊理想.

证 (i) $\langle f\rangle_x$ 保逆序. 设 $a,b \in Q$，$a \leqslant b$，则 $x \& a \leqslant x \& b$. 由 f 是 Q 的模糊理想知，$f(x \& a) \geqslant f(x \& b)$. 所以 $\langle f\rangle_x(a) = \langle x, f\rangle(a) = f(x \& a) \geqslant f(x \& b) = \langle x, f\rangle(b) = \langle f\rangle_x(b)$，即 $\langle f\rangle_x$ 保逆序.

(ii) 设 $a,b \in Q$，则

$\langle f\rangle_x(a\&b)=\langle x, f\rangle(a\&b)=f(x\&(a\&b))=f((x\&a)\&b)\geqslant f(x\&a)=\langle x, f\rangle(a)=\langle f\rangle_x(a)$

$\langle f\rangle_x(a\&b)=\langle f, x\rangle(a\&b)=f((a\&b)\&x)=f(a\&(b\&x))\geqslant f(b\&x)=\langle f, x\rangle(b)=\langle f\rangle_x(b)$

所以$\langle f\rangle_x(a\&b)\geqslant\langle f\rangle_x(a)\vee\langle f\rangle_x(b)$，所以$\langle f\rangle_x$ 也是Q 的模糊理想.

定理 9　设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊理想，$x\in Q$，则 $f\leqslant\langle f\rangle_x$.

证　对任意的 $y\in Q$，因为 f 是 Q 的模糊理想，所以$\langle f\rangle_x(y)=f(x\&y)\geqslant f(y)$，即 $f\leqslant\langle f\rangle_x$.

定理 10　设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊理想，$x\in Q$，则对任意的自然数 n，有$\langle f\rangle_{x^n}\leqslant\langle f\rangle_{x^{n+1}}$.

证　设 n 是任一自然数，$y\in Q$. 因为 f 是 Q 的模糊理想，所以$\langle f\rangle_{x^{n+1}}(y)=f(x^{n+1}\&y)=f(x\&x^n\&y)\geqslant f(x^n\&y)=\langle f\rangle_{x^n}(y)$. 因此$\langle f\rangle_{x^n}\leqslant\langle f\rangle_{x^{n+1}}$.

下面只讨论模糊右理想的情形，对模糊左理想和模糊理想有类似的结论.

定理 11　设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊右理想，$x,y\in Q$，若 $x\leqslant y$，则$\langle x, f\rangle\geqslant\langle y, f\rangle$.

证　对任意的 $a\in Q$，由 $x\leqslant y$ 知 $x\&a\leqslant y\&a$. 又由 f 是 Q 的模糊右理想知 f 保逆序，从而 $f(x\&a)\geqslant f(y\&a)$，所以$\langle x, f\rangle(a)=f(x\&a)\geqslant f(y\&a)=\langle y, f\rangle(a)$，即$\langle x, f\rangle\geqslant\langle y, f\rangle$.

定理 12　设 Q 为 Quantale，f,g 是 Q 的模糊右理想，$x\in Q$，若 $f\leqslant g$，则$\langle x, f\rangle\leqslant\langle x, g\rangle$.

证　对任意的 $a\in Q$，有$\langle x, f\rangle(a)=f(x\&a)\leqslant g(x\&a)=\langle x, g\rangle(a)$. 所以$\langle x, f\rangle\leqslant\langle x, g\rangle$.

定理 13　设 Q 为 Quantale，f 是 Q 的模糊右理想，$x\in Q$，如果 $f(x)>0$，则有 $Q=Supp\langle x, f\rangle$. 其中 $Supp\langle x, f\rangle=\{a\in Q: \langle x, f\rangle(a)>0\}$.

证　因为$\langle x, f\rangle$ 是 Q 的模糊子集，所以 $Supp\langle x, f\rangle\subseteq Q$. 下证 $Q\subseteq Supp\langle x, f\rangle$. 设 $y\in Q$，因为 f 是 Q 的模糊右理想，所以$\langle x, f\rangle(y)=f(x\&y)\geqslant f(x)>0$. 故 $y\in Supp\langle x, f\rangle$. 从而 $Q\subseteq Supp\langle x, f\rangle$. 所以 $Q=Supp\langle x, f\rangle$.

参考文献：

[1]　MULVEY C J. &. [J]. Suppl Rend Circ Nat Palermo，1986，12(2)：99－104.

[2]　ROSENTHAL K I. Quantale and Their Applications [M]. London：Longman Scientific and Techinical，1990.

[3]　谢祥云，吴明芬. 半群的模糊理论 [M]. 北京：科学出版社，2005.

[4]　HAN S W，ZHAO B. The Ideal Conuclei on Quantales [J]. 模糊系统与数学，2007，21(5)：15－20.

[5]　李小娜，李宏飞，崔艳兰. 一类单调二元算子方程组解的存在唯一性定理 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(3)：46－49.

[6]　李相锋，许万银. 一类拟线性 Neumann 特征值问题的多重性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(1)：1－4.

[7]　赵方强. 伴随积分算子半群及其性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(6)：120－124.

Fuzzy Ideals in Quantale

MA　Jue[1]，　ZHOU Yi-hui[2]

1. Department of Mathematics，Yulin University，Yulin Shaanxi 719000，China；

2. School of Mathematics and Information Science，Shaanxi Normal University，Xi'an 710062，China

Abstract：Firstly，the definitions of fuzzy ideal of Quantale is given，secondly，some properties of it is studied，and the relation of ideal and fuzzy ideals of Quantales is given. At last，the definitions of expansion of fuzzy ideal in Quantales is given，some properties of it is studied，and the authors proved that：in Quantales the expansion of fuzzy ideal is also a fuzzy ideal.

Key words：fuzzy ideal；ideal；the expansion of fuzzy ideal

责任编辑　廖　坤