第 36 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0041-04

涉及渐近非扩张映象的带误差的合成显迭代新算法①

黄家琳

宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007

摘要: 在适当的条件下,证明了一涉及渐近非扩张映象的带误差的合成显迭代序列弱收敛或强收敛到有限族渐近非扩张映象的一公共不动点. 在未增加任何附加条件的情况下,将最近的一相关结果由隐迭代算法改进为显式合成迭代算法.

关 键 词: 一致凸性;渐近非扩张映象;公共不动点

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

本文总假定 E 是实巴拿赫空间,C 是 E 的非空闭凸子集. 记 $F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$ 是映象 T 的不动点集,"$\rightharpoonup$"和"$\rightarrow$"分别表示弱收敛和强收敛号,我们说 T 是渐近非扩张的,如果存在实数列 $\{h_n\}\subset[1,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=1$ 和 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant h_n\|x-y\|$ $(\forall x,y\in C,\ n\in\mathbb{N}_+)$.

设 $\{T_1,T_2,\cdots,T_N: C\longrightarrow C\}$ 是 1 族 N 个渐近非扩张映象. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\},\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的 4 个实数列,且对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 满足 $\alpha_n+\gamma_n\leqslant1$ 和 $\beta_n+\delta_n\leqslant1$. 设 $\{u_n\},\{v_n\}$ 是 C 中 2 个有界序列,$x_0\in C$ 为任意给定的点,我们称迭代式

$$\begin{cases}x_n=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_nT_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}+\gamma_nu_n & n\geqslant1\\ y_{n-1}=(1-\beta_n-\delta_n)x_{n-1}+\beta_nT_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}+\delta_nv_n & n\geqslant1\end{cases}\tag{1}$$

为关于有限渐近非扩张映象族 $\{T_i\}_{i=1}^N$ 的带误差的(显式)合成迭代式,其中 $T_n=T_n(\mathrm{mod}\ N)$. 特别地,当 $\beta_n\equiv0\equiv\delta_n$ 时,(1) 式就是非隐迭代式:

$$x_n=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_nT_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}+\gamma_nu_n\qquad n\geqslant1\tag{2}$$

在假定条件 $C+C\subset C$ 下,文献[1]引进并研究了关于有限族渐近非扩张映象的带误差的隐迭代式:

$$x_n=(1-\alpha_n)x_{n-1}+\alpha_nT_{i(n)}^{k(n)}x_n+u_n\qquad n\geqslant1$$

其中 $T_n=T_n(\mathrm{mod}\ N)$.

受文献[1-12]的相关结论和方法的启发,本文将考虑由合成迭代式(1)给出的序列 $\{x_n\}$ 的弱收敛和强收敛性.

定理 1 设 E 是一致凸的实巴拿赫空间,并且满足 Opial 条件,实数列 $\{h_n\}\subset[1,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=1$. 假设 $\mathbb{F}:=\bigcap\limits_{n=1}^{N}F(T_n)\neq\varnothing$,$\{x_n\}\subset C$ 由合成迭代式(1)给出,其中 $x_0\in C$ 为任意给定的点. 若还满足以下条件:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(h_n-1)<\infty$;

(ii) 存在常数 $b,c\in(0,1)$ 使 $b<\alpha_n<c$, $b<\beta_n<c$ $(\forall n\in\mathbb{N})$;

① 收稿日期:2010-04-14

基金项目:四川省教育厅自然科学基金资助项目(08ZC001).

作者简介:黄家琳(1949-),男,浙江省浦江县人,教授,主要从事非线性分析的研究.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n+\delta_n)<\infty$;

(iv) 极限$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$存在.

则有下列 2 个结论成立:

(a) 由合成迭代式(1) 给出的序列$\{x_n\}$弱收敛于映象族$\{T_i\}_{i=1}^{N}$的 1 个公共不动点;

(b) 若$\{T_i\}_{i=1}^{N}$中的某映象 T_{l_0} 是半紧的,则由合成迭代式(1) 给出的序列$\{x_n\}$强收敛于映象族$\{T_i\}_{i=1}^{N}$的 1 个公共不动点.

证 首先易证条件(iii) 等价于

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n+\delta_n)<\infty\\ \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n+\delta_n)<\infty\end{cases}$$

其次,对任意给定的点 $p\in\mathbb{F}$,相应地存在常数 $M>0$,使得

$$\|p\|+\|u_n\|+\|v_n\|<M\qquad\forall n\in\mathbb{N}\tag{3}$$

由式(1) 和(3) 不难得到

$$\|x_n-p\|\leqslant(1+3\mu_n)\|x_{n-1}-p\|+2M(\delta_n+\gamma_n)\tag{4}$$

其中 $\mu_n=h_n-1$. 在式(4) 中,令 $b_n=3\mu_n$, $c_n=2M(\delta_n+\gamma_n)$,则由条件(i) 和(iii) 知极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在,即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=d\qquad\forall p\in\mathbb{F}\tag{5}$$

其中 $d\geqslant 0$ 是与 p 有关的常数. 由(5) 式易知$\{x_n\}$在 C 中有界. 从而存在常数 $M_0>0$,使

$$\|x_n\|\leqslant M_0\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

由空间 E 的一致凸性知,E 的每一有界集是弱紧的 . 因此存在子列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$使

$$x_{n_k}\rightharpoonup q\in C$$

从而我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|y_{n-1}-p\|=d\tag{6}$$

因此可以得到

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\|(1-\beta_n)(x_{n-1}-p+\delta_n v_n-\delta_n x_{n-1})+\beta_n(T_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}-p+\delta_n v_n-\delta_n x_{n-1})\|=d\\ \limsup_{n\to\infty}\|x_{n-1}-p+\delta_n v_n-\delta_n x_{n-1}\|\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|x_{n-1}-p\|+\limsup_{n\to\infty}\delta_n(M+M_0)\leqslant d\\ \limsup_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}-p+\delta_n v_n-\delta_n x_{n-1}\|\leqslant\limsup_{n\to\infty}h_n\|x_{n-1}-p\|+\limsup_{n\to\infty}\delta_n(M+M_0)\leqslant d\end{cases}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}-x_{n-1}\|=0\tag{7}$$

而

$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\|(1-\alpha_n)(x_{n-1}-p+\gamma_n u_n-\gamma_n x_{n-1})+\alpha_n(T_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}-p+\gamma_n u_n-\gamma_n x_{n-1})\|=d\\ \limsup_{n\to\infty}\|x_{n-1}-p+\gamma_n u_n-\gamma_n x_{n-1}\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|x_{n-1}-p\|+\limsup_{n\to\infty}\gamma_n(M+M_0)\leqslant d\\ \limsup_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}-p+\gamma_n u_n-\gamma_n x_{n-1}\|\leqslant\limsup_{n\to\infty}h_n\|y_{n-1}-p\|+\limsup_{n\to\infty}\gamma_n(M+M_0)\leqslant d\end{cases}$$

则由文献[12] 知

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}-x_{n-1}\|=0\tag{8}$$

由(1) 式我们有

$$\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\alpha_n\|T_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}-x_{n-1}\|+\gamma_n\|u_n-x_{n-1}\|\leqslant c\|T_{i(n)}^{k(n)}y_{n-1}-x_{n-1}\|+\gamma_n(M+M_0)$$

再由(8) 式以及条件(iii) 知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n-1}\|=0$$

从而,对 $\forall j\in\{1,2,\cdots,N\}$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_{n+j}\| = 0$$

从而可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n - x_{n-1}\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n - T_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1}\| + \lim_{n\to\infty}\|T_{i(n)}^{k(n)}x_{n-1} - x_{n-1}\| = 0 \tag{9}$$

由于对任给自然数 $n > N$ 都有 $n = (k(n)-1)N + i(n)$ $(i(n)\in\{1,2,\cdots,N\})$. 令 $\sigma_n = \|T_{i(n)}^{k(n)}x_n - x_{n-1}\|$，则由(9)式我们有 $\sigma_n \to 0$ 以及

$$\begin{aligned}
&\|x_{n-1} - T_n x_n\| \leqslant \\
&\|x_{n-1} - T_{i(n)}^{k(n)}x_n\| + \|T_{i(n)}^{k(n)}x_n - T_n x_n\| = \\
&\sigma_n + \|T_{i(n)}^{k(n)}x_n - T_{i(n)}x_n\| \leqslant \sigma_n + L\|T_{i(n)}^{k(n)-1}x_n - x_n\| \leqslant \\
&\sigma_n + L(\|T_{i(n)}^{k(n)-1}x_n - T_{n-N}^{k(n)-1}x_{n-N}\| + \|T_{n-N}^{k(n)-1}x_{n-N} - x_{(n-N)-1}\| + \|x_{(n-N)-1} - x_n\|)
\end{aligned}$$

由于对任给自然数 $n > N$ 有 $n = (n-N)\ (\mathrm{mod}\ N)$，再由 $n = (k(n)-1)N + i(n)$，有

$$n - N = ((k(n)-1)-1)N + i(n) = (k(n-N)-1)N + i(n-N)$$

即有

$$k(n-N) = k(n) - 1 \qquad i(n-N) = i(n)$$

因此我们有

$$\|T_{i(n)}^{k(n)-1}x_n - T_{n-N}^{k(n)-1}x_{n-N}\| = \|T_{i(n)}^{k(n)-1}x_n - T_{i(n)}^{k(n)-1}x_{n-N}\| \leqslant L\|x_n - x_{n-N}\|$$

以及

$$\|T_{n-N}^{k(n)-1}x_{n-N} - x_{(n-N)-1}\| = \|T_{i(n-N)}^{k(n-N)}x_{n-N} - x_{(n-N)-1}\| = \sigma_{n-N}$$

从而化简可得

$$\|x_{n-1} - T_n x_n\| \leqslant \sigma_n + L^2\|x_n - x_{n-N}\| + L\sigma_{n-N} + L\|x_n - x_{(n-N)-1}\| \to 0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n-1} - T_n x_n\| = 0$$

进一步，对 $\forall j\in\{1,2,\cdots,N\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_{n+j}x_n\| &\leqslant \lim_{n\to\infty}(\|x_n - x_{n+j}\| + \|x_{n+j} - T_{n+j}x_{n+j}\| + \|T_{n+j}x_{n+j} - T_{n+j}x_n\|) \leqslant \\
&\lim_{n\to\infty}((1+L)\|x_n - x_{n+j}\| + \|x_{n+j} - T_{n+j}x_{n+j}\|) = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

对 $\forall j\in\{1,2,\cdots,N\}$，由(10)式知数列$\{\|x_n - T_{n+j}x_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ 的极限均是 0. 因此，数列 $\bigcup_{j=1}^{N}\{\|x_n - T_{n+j}x_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ 的极限必是 0. 从而对 $\forall l\in\{1,2,\cdots,N\}$，不难得到

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_l x_n\| = 0 \tag{11}$$

以及

$$\lim_{n_k\to\infty}\|x_{n_k} - T_l x_{n_k}\| = 0$$

再由 $x_{n_k} \rightharpoonup q$，我们有

$$(I - T_l)q = 0 \qquad \forall l\in\{1,2,\cdots,N\}$$

即 $q\in \mathbb{F} = \bigcap_{n=1}^{N} F(T_n)$. 利用 Opial 条件和反证法不难得到 $x_n \rightharpoonup q$ $(n\to\infty)$. 这就证明了定理 1 的结论(a).

显然，由(11)式以及半紧映象的条件我们可证定理 1 的结论(b).

在定理 1 的合成迭代式(1)中，特别地取 $\beta_n \equiv 0 \equiv \delta_n$，并注意到定理 1 中的条件(iv)仅仅是为了使(6)式成立，则由定理 1 我们可得：

推论 1　设 E 是一致凸的实巴拿赫空间，且满足 Opial 条件. 设 $\mathbb{F} := \bigcap_{n=1}^{N} F(T_n) \neq \varnothing$. 序列$\{x_n\}\subset C$ 由显迭代式(2)给出，其中 $x_0\in C$ 为任意给定的点，如果以下条件满足：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(h_n - 1) < \infty$；

(ii) 存在常数 $b, c\in(0,1)$，使得 $b < \alpha_n < c$ $(\forall n\in\mathbb{N})$；

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < \infty$.

则我们有以下2个结论成立:

(c) 由非隐迭代式(2)给出的序列$\{x_n\}$弱收敛于映象族$\{T_i\}_{i=1}^N$的1个公共不动点;

(d) 如果$\{T_i\}_{i=1}^N$中存在半紧映象T_{l_0},那么由非隐迭代式(2)给出的序列$\{x_n\}$强收敛于映象族$\{T_i\}_{i=1}^N$的1个公共不动点.

注1 推论1将文献[1]中的隐迭代算法改进为显式迭代算法,当然也改进了其相关参考文献中的相应结果.

参考文献:

[1] CHANG S S. On the Convergence of Implicit Iterative Process with Error for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. J Math Anal Appl, 2006, 313: 273-283.

[2] BAUSCHKE H H. The Approximation of Fixed Points of Compositions of Nonexpansive Mappings in Hilbert Space [J]. J Math Anal Appl, 1996, 202: 150-159.

[3] HALPERN B. Fixed Points of Nonexpansive Mappings [J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 957-961.

[4] 饶若峰, 何庆高. 涉及无限族严格伪压缩映象的广义混合平衡问题的混合迭代算法 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(12): 143-147.

[5] 饶若峰. 渐近非扩张映象具误差的合成隐迭代序列的弱收敛和强收敛定理 [J]. 数学年刊: A辑, 2008, 29(4): 461-470.

[6] 饶若峰. 带误差的合成隐迭代新算法 [J]. 数学物理学报, 2009, 29A(3): 823-831.

[7] 毛建树. Banach空间中一类新的完全广义非线性拟似变分包含的Ishikawa型迭代算法 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(1): 28-34.

[8] 饶若峰. 一类含第一特征值具临界指数的半线性椭圆方程 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2004, 29(4): 549-552.

[9] 饶若峰. 严格渐近伪压缩映象之修正型Mann迭代算法的强收敛性 [J]. 数学进展, 2010, 39(3): 283-288.

[10] SCHU J. Weak and Strong Convergence of Fixed Points of Asymptotaically Nonexpansive Mappings [J]. Bull Austral Math Soc, 1991, 43: 153-159.

[11] TAN K K, XU H K. Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings by the Ishikawa Iterative Process [J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 301-308.

[12] CHANG S S, CHO Y J, ZHOU H Y. Demi-Closed Principle and Weak Convergence Problems for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. J Korean Math Soc, 2001, 38: 1245-1260.

New Composite Explicit Iterative Scheme for Asymptotically Nonexpansive Mappings with Errors

HUANG Jia-lin

Department of Mathematics, Yibin University, Yibin Sichuan 644007, China

Abstract: Under some suitable conditions, a new convergent theorem for a composite explicit iterative process with errors is proved. It is worth mentioning that this result extends the corresponding results from implicit iterative process to composite explicit iterative process without any additive assumptions.

Key words: uniform convexity; asymptotically nonexpansive mapping; common fixed point

责任编辑 廖 坤