文章编号:1000-5471(2011)03-0030-08

加权 Bloch 空间上的加权复合算子[①]

龙见仁, 伍鹏程

贵州师范大学 数学与计算机科学学院,贵阳 550001

摘要: 利用算子有界性和紧性的定义,给出了加权 Bloch 空间及加权小 Bloch 空间上加权复合算子的有界性和紧性的充分必要条件.

关 键 词: 加权复合算子;加权 Bloch 空间;有界性;紧性

中图分类号: O177.1 **文献标志码:** A

记复平面上的单位圆盘为 D,D 上解析函数的全体记作 $H(D)$. 以 B^{α} 和 B_0^{α} 分别记为 D 上的 α-Bloch 空间和小 α-Bloch 空间,其中 $0<\alpha<+\infty$,其定义可参看文献[1-3]. 当 $\alpha=1$ 时,就是经典的 Bloch 空间 B 和小 Bloch 空间 B_0.

文献[1] 介绍了 D 上的加权 Bloch 空间和加权小 Bloch 空间,其定义分别为:

$$B_{\log}=\{f\in H(D):\ \|f\|_{\log}=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|f'(z)|<\infty\}$$

$$B_{0,\log}=\{f\in H(D):\ \lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|f'(z)|=0\}$$

在范数 $\|f\|_{B_{\log}}=|f(0)|+\|f\|_{\log}$ 下,$B_{\log}$ 成为巴拿赫空间,并且 $B_{0,\log}$ 是 $B_{\log}$ 的闭子空间. 从不等式 $(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}|f'(z)|\geqslant(\log 2)(1-|z|^2)|f'(z)|$ 可以看出 $B_{\log}$ 空间为 Bloch 空间的子空间,因此有包含关系:$B_{0,\log}\subseteq B_{\log}\subset B$.

设 u 是 D 上的解析函数,φ 是 D 到 D 上的全纯自映射,定义 $H(D)$ 上的加权复合算子 uC_{φ} 为:$uC_{\varphi}f=uf\circ\varphi$,其中 $f\in H(D)$. 当 $\varphi(z)=z$ 时,uC_{φ} 就是由 u 引入点乘算子 M_u 得到的;当 $u(z)=1$ 时,uC_{φ} 就是由 φ 引入复合算子 C_{φ} 得到的.

文献[2] 研究了 D 上的 Bloch 空间和小 Bloch 空间上的加权复合算子的有界性和紧性问题;文献[3] 刻画了 C_{φ} 分别在 B 和 B_0 上有界(或为紧)的特征;文献[4] 给出了 C_{φ} 在 $B_{\log}$ 上是有界算子或紧算子的充要条件;经典的 Bloch 空间与 α-Bloch 空间上的点乘算子和复合算子都得到了众多数学工作者的研究(见文献[5-10]). 本文将系统地讨论加权 Bloch 空间上加权复合算子的有界性和紧性,其结果推广了加权 Bloch 空间及加权小 Bloch 空间上复合算子及点乘算子的一些已有结果. 另外文中的 C 表示与变量 z 和 w 无关的正常数,不同的地方可以不一样.

1 加权 Bloch 空间上的加权复合算子

定理 1 设 u 是 D 上的解析函数,φ 是 D 到 D 上的全纯自映射. 则 uC_{φ} 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子的充

① 收稿日期:2010-04-25
基金项目:贵州省科学技术基金资助项目(黔科合 J 字 LKS[2010]07 号).
作者简介:龙见仁(1981-),男,贵州锦屏人,讲师,主要从事函数论的研究.
通信作者:伍鹏程,教授.

要条件是：

(i) $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}\left|\log(\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|})\right||u'(z)|<+\infty$；

(ii) $\sup\limits_{z\in D}\dfrac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|<+\infty.$

定理 2　设 u 是 D 上的解析函数，φ 是 D 到 D 上的全纯自映射. 假设 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子，则 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的紧算子的充要条件是：

(i) $\lim\limits_{|\varphi(z)|\to1}(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}\log(\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|})|u'(z)|=0$；

(ii) $\lim\limits_{|\varphi(z)|\to1}\dfrac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|=0.$

引理 1[11]　若 $f\in B_{\log}$，则 $|f(z)|\leqslant(2+\log(\log\dfrac{2}{1-|z|}))\|f\|_{B_{\log}}$；特别地，当 $|z|\geqslant r^*=1-\dfrac{2}{e^{e^2}}$ 时，$|f(z)|\leqslant2\log(\log\dfrac{2}{1-|z|})\|f\|_{B_{\log}}$.

引理 2　设 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子，则 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的紧算子的充分必要条件是对 $B_{\log}$ 中任一列在 D 上内闭一致收敛于 0 的有界序列 $\{f_n\}$，有 $\|uC_\varphi(f_n)\|_{B_{\log}}\to0\ (n\to\infty)$.

证　利用紧算子的定义及 Montel 定理可证得.

定理 1 的证明　先证明必要性. 若 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子，分别取 $f(z)=1$ 和 $f(z)=z$，得 $u\in B_{\log}$ 及

$$K_1=\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|<+\infty \tag{1}$$

任取 $w\in D$，设

$$f_w(z)=2\log(\log\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z})-\frac{1}{\log(\log\dfrac{4}{1-|\varphi(z)|^2})}(\log\log\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z})^2 \tag{2}$$

则

$$f'_w(z)=\frac{2\overline{\varphi(w)}}{(1-\overline{\varphi(w)}z)\log\dfrac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z}}-2\log\log(\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z})\times$$

$$\frac{\overline{\varphi(w)}}{(1-\overline{\varphi(w)}z)\log\dfrac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z}\log(\log\dfrac{4}{1-|\varphi(w)|^2})}$$

通过计算得 $f_w\in B_{\log}$，$\|f_w\|_{B_{\log}}\leqslant16$，$f'_w(\varphi(w))=0$ 和 $f_w(\varphi(w))=\log(\log\dfrac{4}{1-|\varphi(w)|^2})$. 于是

$$(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u'(w)f_w(\varphi(w))|=$$

$$(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|(uC_\varphi f_w)'(w)|\leqslant$$

$$\|uC_\varphi f_w\|_{B_{\log}}\leqslant\|uC_\varphi\|\|f_w\|_{B_{\log}}\leqslant16\|uC_\varphi\|<+\infty$$

所以

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}\left|\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|})\right||u'(z)|<+\infty \tag{3}$$

任意取 $w\in D$，当 $w\neq0$ 时，取测试函数

$$f_w(z)=\int_0^z\left(1-\frac{\overline{w}^2}{|w|^2}z^2\right)^{-1}\left(\log\frac{4}{1-\frac{\overline{w}^2}{|w|^2}z^2}\right)^{-1}\mathrm{d}z \tag{4}$$

通过计算得 $f_w\in B_{\log}$ 且 $\|f_w\|_{B_{\log}}<4$. 于是有

$$\|uC_\varphi(f_w)\|_{B_{\log}}\leqslant\|uC_\varphi\|\|f_w\|_{B_{\log}}=C<+\infty \tag{5}$$

若对任意的 $z\in D$ 满足 $\varphi(z)\neq0$，将 $w=\varphi(z)$ 代入(5)式，并利用引理1和(3)式，得

$$\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{4}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|=$$

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)f'_w(\varphi(z))|\leqslant$$

$$\|uC_\varphi f_w\|_{B_{\log}}+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f_w(\varphi(z))|\leqslant$$

$$C+4\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}\left(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)|u'(z)|<+\infty$$

若对任意的 $z\in D$ 满足 $\varphi(z)=0$，则由(1)式得

$$\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|=\frac{1}{\log 2}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|<+\infty$$

综上结论(ii)成立.

下证充分性. 设 $f\in B_{\log}$，由引理1得

$$\|uC_\varphi f\|_{\log}\leqslant\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))|+$$

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\leqslant$$

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|\left(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)\|f\|_{B_{\log}}+$$

$$\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}|f'(\varphi(z))||u(z)\varphi'(z)|\leqslant$$

$$C\|f\|_{B_{\log}}+\|f\|_{B_{\log}}\sup_{z\in D}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|<+\infty$$

从而 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子，定理1证毕.

定理2的证明 先证必要性. 假设 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的紧算子. 设 $\{z_n\}$ 是 D 中满足 $|\varphi(z_n)|\to1(n\to\infty)$ 的点列. 令

$$f_n(z)=\frac{3}{a_n}\left(\log\log\frac{4}{1-\overline{\varphi(z_n)}z}\right)^2-\frac{2}{a_n{}^2}\left(\log\log\frac{4}{1-\overline{\varphi(z_n)}z}\right)^3$$

其中 $a_n=\log\log\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}$. 显然 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于0. 计算得 $f_n\in B_{\log}$ 且 $\sup_n\|f_n\|_{B_{\log}}<\infty$，所以 $\{f_n\}$ 是 $B_{\log}$ 空间上内闭一致收敛于0有界序列. 由 $f'_n(\varphi(z_n))\equiv0$ 及 $f_n(\varphi(z_n))=a_n$ 得

$$\|uC_\varphi f_n\|_{B_{\log}}\geqslant\|uC_\varphi f_n\|_{\log}\geqslant(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|u'(z_n)f_n(\varphi(z_n))+u(z)f'_n(\varphi(z_n))\varphi'(z_n)|=$$

$$(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|u'(z_n)|\left|\log\left(\log\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}\right)\right|\geqslant$$

$$(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|u'(z_n)|\left|\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|})\right|$$

由引理 2 知结论(i) 成立.

假设结论(ii) 不成立，那么存在 $\varepsilon_0>0$ 及 D 中点列$\{z_n\}$，当$|\varphi(z_n)|\to 1(n\to\infty)$时，使得

$$\frac{(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}}{(1-|\varphi(z_n)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|}}|u(z_n)\varphi'(z_n)|\geqslant\varepsilon_0$$

令 $\varphi(z_n)=r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_n}$，取 $g_n(z)=\int_0^z(\frac{r_n}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_n}r_nw}-\frac{r_n^{\ 2}}{1-r_n^{\ 2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_n}w})(\log\frac{4}{1-r_n^{\ 2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_n}w})^{-1}\mathrm{d}w$，通过计算知 $\|g_n\|_{B_{\log}}\leqslant 8$，故$\{g_n\}$是 $B_{\log}$ 上内闭一致收敛于 0 的有界列.

另一方面，由结论(i) 和引理 1，对充分大的 n，有

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi g_n\|_{B_{\log}}\geqslant&(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|g'_n(\varphi(z_n))||u(z_n)\varphi'(z_n)|-\\
&(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|g_n(\varphi(z_n))||u'(z_n)|\geqslant\\
&(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}(\frac{r_n}{1-r_n^{\ 2}}-\frac{r_n^{\ 2}}{1-r_n^{\ 3}})(\log\frac{4}{1-r_n^{\ 3}})^{-1}|\varphi'(z_n)u(z_n)|-\\
&2(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|})\|g_n\|_{B_{\log}}|u'(z_n)|\geqslant\\
&\frac{(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}|\varphi(z_n)|}{6(1-|\varphi(z_n)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|}}|\varphi'(z_n)u(z_n)|-\\
&16(1-|z_n|^2)\log\frac{2}{1-|z_n|}\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z_n)|}|u'(z_n)|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{6}
\end{aligned}$$

由引理 2 知，这与 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的紧算子矛盾，必要性得证.

下证充分性. 假设结论(i) 和(ii) 成立. 设$\{f_n\}$是 $B_{\log}$ 空间上内闭一致收敛于 0 的任一有界序列. 令$M=\sup\limits_n\|f_n\|_{B_{\log}}<+\infty$. 由引理 2 知，仅需要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|uC_\varphi(f_n)\|_{B_{\log}}\to 0$ 成立，而这等价于证明以下 2 式成立：

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u(w)f'_n(\varphi(w))\varphi'(w)|\to 0\qquad n\to\infty$$

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u'(w)f_n(\varphi(w))|\to 0\qquad n\to\infty$$

若$|\varphi(w)|\leqslant r<1$，由(1) 式得

$$(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u(w)f'_n(\varphi(w))\varphi'(w)|\leqslant K_1\max_{|z|\leqslant r}|f'_n(z)|$$

若$|\varphi(w)|>r$，那么

$$\begin{aligned}
&(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u(w)f'_n(\varphi(w))\varphi'(w)|=\\
&(1-|\varphi(w)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|}|f'_n(\varphi(w))|\frac{(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}}{(1-|\varphi(w)^2|)\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|}}|u(z)\varphi'(w)|\leqslant\\
&M\frac{(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}}{(1-|\varphi(w)^2|)\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|}}|u(z)\varphi'(w)|
\end{aligned}$$

总之

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u(w)f'_n(\varphi(w))\varphi'(w)|\leqslant$$

$$K_1\max_{|w|\leqslant r}|f'_n(w)|+\sup_{|\varphi(w)|>r}M\frac{(1-|w|^2)\log\dfrac{2}{1-|w|}}{(1-|\varphi(w)^2|)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(w)|}}|u(z)\varphi'(w)|$$

所以$\sup\limits_{w\in D}(1-|w|^2)\log\dfrac{2}{1-|w|}|u(w)f'_n(\varphi(w))\varphi'(w)|\to 0\ (n\to\infty)$.

另一方面，若$|\varphi(w)|\leqslant r<1$，由$u\in B_{\log}$得

$$(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u'(w)f_n(\varphi(w))|\leqslant\|u\|_{B_{\log}}\max_{|z|\leqslant r}|f_n(z)|$$

若$|\varphi(w)|>r$，不妨设$r>r^*$，由引理1得

$$(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u'(w)f_n(\varphi(w))|\leqslant$$

$$2M(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}\left|\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|})\right||u'(w)|$$

所以

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}|u'(w)f_n(\varphi(w))|\leqslant$$

$$\|u\|_{B_{\log}}\max_{|w|\leqslant r}|f_n(w)|+2M\sup_{|w|>r}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|}\left|\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|})\right||u'(w)|$$

这就表明$\sup\limits_{w\in D}(1-|w|^2)\log\dfrac{2}{1-|w|}|u'(w)f_n(\varphi(w))|\to 0(n\to\infty)$，定理2证毕.

2 加权小 Bloch 空间上的加权复合算子

定理3 设u是D上的解析函数，φ是D到D上的全纯自映射. 则uC_φ为$B_{0,\log}$空间上的有界算子的充要条件是：

(i) $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}\left|\log(\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|})\right||u'(z)|<+\infty$;

(ii) $\sup\limits_{z\in D}\dfrac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|<+\infty$;

(iii) $u\in B_{0,\log}$;

(iv) $\lim\limits_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|=0$.

定理4 设u是D上的解析函数，φ是D到D上的全纯自映射. 则uC_φ为$B_{0,\log}$空间上紧算子的充要条件是：

(i) $\lim\limits_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}\log(\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|})|u'(z)|=0$;

(ii) $\lim\limits_{|z|\to 1}\dfrac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|=0$.

引理3 设$K\subset B_{0,\log}$，则K是紧集当且仅当K是有界闭集且满足

$$\lim_{|z|\to 1}\sup_{f\in K}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|^2}|f'(z)|=0$$

证 证明方法同文献[3]的引理1，故略去不证.

引理 4[11]　若 $f\in B_{0,\log}$，则 $\lim\limits_{|z|\to1}\dfrac{|f(z)|}{\log(\log\dfrac{2}{1-|z|^2})}=0$.

定理 3 的证明　先证必要性. 假设 uC_φ 为 $B_{0,\log}$ 空间上的有界算子，取 $f(z)=1$，得 $u\in B_{0,\log}$，即结论(iii) 成立. 取 $f(z)=z$，得 $u(z)\varphi(z)\in B_{0,\log}$，即

$$\lim_{|z|\to1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)\varphi(z)+u(z)\varphi'(z)|=0$$

因为 $|\varphi(z)|\leqslant1$ 且 $u\in B_{0,\log}$，所以

$$\lim_{|z|\to1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|=0$$

故结论(iv) 成立.

设 uC_φ 为 $B_{0,\log}$ 空间上的有界算子，显然对任意的 $f\in B_{\log}$，令 $f_t(z)=f(tz)$ $(0<t<1)$，则有 $f_t\in B_{0,\log}$，且 $\|f_t\|_{B_{\log}}\leqslant4\|f\|_{B_{\log}}$. 于是 $\|uC_\varphi f_t\|_{B_{\log}}\leqslant\|uC_\varphi\|\ \|f_t\|_{B_{\log}}\leqslant4\|uC_\varphi\|\ \|f\|_{B_{\log}}<+\infty$，所以 $\|uC_\varphi f\|_{B_{\log}}\leqslant4\|uC_\varphi\|\ \|f\|_{B_{\log}}<+\infty$，故 uC_φ 为 $B_{\log}$ 空间上的有界算子. 由定理 1 得结论(i) 和(ii) 成立.

下证充分性. 假设结论(i)—(iv) 成立. 对任意的 $\varepsilon>0$，设 $f\in B_{0,\log}$，则由引理 4 知，存在 $\delta_1\in(0,1)$，使得当 $|z|>\delta_1$，$z\in D$ 时，有 $|f(z)|<\varepsilon\left|\log(\log\dfrac{2}{1-|z|^2})\right|$. 因此当 $|\varphi(z)|>\delta_1$ 时，由 $u\in B_{\log}$ 知存在正常数 C_1，使得

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))|<\\&\varepsilon(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|\left|\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right|\leqslant C_1\varepsilon\end{aligned}\tag{6}$$

另一方面，由结论(iii) 知，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2\in(0,1)$，使得当 $|z|>\delta_2$，$z\in D$ 时，有 $(1-|z|^2)\cdot\log\dfrac{2}{1-|z|}|u'(z)|<\varepsilon$. 因此当 $|\varphi(z)|\leqslant\delta_1$ 时，若 $|z|>\delta_2$，存在正常数 C_2，使得

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))|\leqslant\\&(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|})\|f\|_{B_{\log}}\leqslant\\&(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|(2+\log\log\frac{2}{1-\delta_1^2})\|f\|_{B_{\log}}\leqslant C_2\varepsilon\end{aligned}\tag{7}$$

结合(6) 式和(7) 式，当 $|z|>\delta_2$ 时有

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))|\leqslant\max\{C_1,C_2\}\varepsilon\tag{8}$$

又因为 $f\in B_{0,\log}$，故对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_3\in(0,1)$，使得当 $|z|>\delta_3$，$z\in D$ 时，有 $|f'(z)|<\dfrac{\varepsilon}{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}$. 因此当 $|\varphi(z)|>\delta_3$ 时，由结论(ii) 知存在正常数 C_3，使得

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|<\\&\varepsilon\frac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|\leqslant C_3\varepsilon\end{aligned}\tag{9}$$

另一方面，由结论(iv) 知对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_4\in(0,1)$，使得当 $|z|>\delta_4$，$z\in D$ 时，有 $(1-|z|^2)\cdot\log\dfrac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|<\varepsilon$. 因此当 $|\varphi(z)|\leqslant\delta_3$ 时，若 $|z|>\delta_4$，则存在正常数 C_4 使得

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\leqslant$$

$$\|f\|_{B_{\log}}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|\leqslant$$

$$\|f\|_{B_{\log}}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-\delta_3{}^2)\log\frac{2}{1-\delta_3}}|u(z)\varphi'(z)|\leqslant C_4\varepsilon \tag{10}$$

结合(9)式和(10)式，当$|z|>\delta_4$时有

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\leqslant\max\{C_3,C_4\}\varepsilon \tag{11}$$

结合(8)式和(11)式，令$\delta=\max\{\delta_2,\delta_4\}$，当$|z|>\delta$时存在正常数$C$，使得

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))+u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|<C\varepsilon$$

即$\lim\limits_{|z|\to1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|=0$，因此$uC_\varphi f\in B_{0,\log}$，定理 3 证毕.

定理 4 的证明 先证充分性. 由引理 3，uC_φ为$B_{0,\log}$空间上的紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to1}\sup_{\|f\|_{B_{\log}}\leqslant1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|=0$$

假设结论(i)和(ii)成立. 由结论(i)得$u\in B_{0,\log}$. 任给$f\in B_{0,\log}$且满足$\|f\|_{B_{\log}}\leqslant1$，则有

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|\leqslant$$

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)f(\varphi(z))|+(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\leqslant$$

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|})\|f\|_{B_{\log}}+$$

$$\|f\|_{B_{\log}}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|$$

于是

$$\sup\{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|:f\in B_{0,\log},\|f\|_{B_{\log}}\leqslant1\}\leqslant$$

$$(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u'(z)|(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|})+\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|$$

所以$\lim\limits_{|z|\to1}\sup\limits_{\|f\|_{B_{\log}}\leqslant1}\{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|\}=0$，故$uC_\varphi$为$B_{0,\log}$空间上的紧算子.

下证必要性. 假设uC_φ为$B_{0,\log}$空间上的紧算子. 由引理 3，对任意常数$C>0$，有

$$\lim_{|z|\to1}\sup\{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f)'(z)|:f\in B_{0,\log},\|f\|_{B_{\log}}\leqslant1\}=0 \tag{12}$$

注意到定理 1 的证明和(2)式中所取的函数族是$B_{0,\log}$空间中一致有界的函数族，所以

$$\lim_{|w|\to1}(1-|w|^2)\log\frac{2}{1-|w|^2}\log(\log\frac{2}{1-|\varphi(w)|^2})|u'(w)|=0 \tag{13}$$

同样地，在(4)式中所取的函数族也是$B_{0,\log}$空间中一致有界的函数族，所以当$\varphi(z)\neq0$时，有

$$\lim_{|z|\to1}\frac{(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|\leqslant2\lim_{|z|\to1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|(uC_\varphi f_w)'(z)|+$$

$$2\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}\left(2+\log\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)|u'(z)|$$

这样，当 $\varphi(z)\neq 0$ 时，由(12) 和(13) 式有

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{(1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|}}{(1-|\varphi(z)|^2)\log\dfrac{2}{1-|\varphi(z)|}}|u(z)\varphi'(z)|=0$$

若 $\varphi(z)=0$，则由定理 3 中结论(iv) 得

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\log\frac{2}{1-|z|}|u(z)\varphi'(z)|=0$$

定理 4 证毕.

参考文献：

[1] ATTLE K. Toeplitz and Hankel on Bergman One Space [J]. Hokkaido Math，1992，21：279－293.

[2] OHNO S，ZHAO R H. Weighted Composition Operators on the Bloch Space [J]. Bull Austral Math Soc，2001，63(2)：177－185.

[3] MADIGAN K，MATHESON A. Compact Composition Operators on the Bloch Space [J]. Trans Amer Math Soc，1995，347：2679－2687.

[4] YONEDA R. The Composition Operators on Weighted Bloch Spaces [J]. Arch Math，2002，78：310－317.

[5] ZHAO R H. Composition Operators from Bloch Type Spaces to Hardy and Besov Spaces [J]. J Math Anal Appl，1999，233(2)：749－766.

[6] ZHU K H. Bloch Type Spaces of Analytic Fnctions [J]. Rochy Mountain J Math，1993，23(3)：1143－1177.

[7] LOU Z J，GUO J D，SONG D J. Multipliers and Cyclic Vectors in Bloch Type Spaces [J]. Acta Mathematica Sinica：English Series，2003，19(1)：79－88.

[8] LI H Y，LIU P D. Composition Operators Between Generally Weighted Bloch Space and $Q_{\log}^{q}$ Space [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis，2008(8)：1－12.

[9] STEVIC S. On New Bloch-Type Spaces [J]. Applied Mathematics and Computation，2009，215(2)：841－849.

[10] 张学军. p-Bloch 空间上的复合算子和加权复合算子 [J]. 数学年刊：A 辑，2003，24(6)：711－720.

[11] 叶善力. 不同权的 Bloch 型空间之间的加权复合算子 [J]. 数学学报：中文版，2007，50(4)：209－224.

[12] 洪　勇. 一个 Hilbert 型奇异重积分算子的范数 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(3)：24－30.

[13] 吕凤姣，李江涛. 有关全纯函数正规族的一个结果 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(3)：34－36.

Weighted Composition Operators on Weighted Bloch Space

LONG Jian-ren，　WU Peng-cheng

School of Mathematics and Computer Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China

Abstract：By using the definitions of the boundedness and compactness，the boundedness and compactness of the weighted composition operators on the weighted Bloch space and the weighted little Bloch space on the unit disk are discussed. Some necessary and sufficient conditions are given for the weighted composition operators to be a bounded or compact operator on weighted Bloch space and the weighted little Bloch space.

Key words：weighted composition operator；weighted Bloch space；boundedness；compactness

责任编辑　廖　坤