文章编号:1000－5471(2011)03－0024－06

二阶三点泛函微分方程边值问题正解的存在性①

安蕊莲，　韩晓玲

西北师范大学 数学与信息科学学院，兰州 730070

摘要： 利用锥上的不动点定理，讨论二阶三点泛函微分方程边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t, x_t)=0 & t\in[0, 1] \\ x(0)=0 \\ x(1)=\alpha x(\eta) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $0<\eta<1$，$0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$ 是给定的常数.

关　键　词： 泛函微分方程；正解；边值问题

中图分类号： O175.14　　　　**文献标志码：** A

随着近代科学技术的发展，在许多科学领域的研究中都出现了泛函微分方程. 所以对泛函微分方程的研究不但有重要的理论意义，更有广泛的实际应用价值. 许多作者研究了泛函微分方程边值问题正解的存在性[1-2]，其中文献[1] 研究了泛函边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t, x_t)=0 & 0<t<T \\ x_0=\varphi \\ x(T)=A \end{cases}$$

正解的存在性，其中 f：$[0, T]\times C_r \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续，$\varphi\in C[-r, 0]$，$A\in\mathbb{R}$. 文献[2] 研究了 Sturm-Liouville 型泛函微分方程边值问题正解的存在性. 注意到文献[1－2] 研究的都是两点边值问题正解的存在性，因此本文试图利用锥上的不动点定理考虑下述二阶三点泛函微分方程边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t, x_t)=0 & t\in[0, 1] \\ x(0)=0 \\ x(1)=\alpha x(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中问题(1) 的解必须满足初始函数条件：$x(s)=\varphi(s)$ $(s\in[-r, 0])$.

有关多点边值问题可解性的更多结果，参见文献[3－11].

为了方便，下面给出一些记号以及工具定理 A. 对 $\forall r\in[0, \infty)$，记 $C_r=\{\varphi \mid \varphi\in C[-r, 0]\}$，赋范为 $\|\varphi\|_{[-r, 0]}=\sup\limits_{s\in[-r, 0]}|\varphi(s)|$. 记 $C_r^+=\{x\in C_r \mid x(t)\geqslant 0, t\in[-r, 0]\}$. 令 $x_t(s)=x(t+s)$，其中 $s\in[-r, 0]$，$t\in[0, 1]$，$x\in C_r$.

注　当 $r=0$ 时，C_r 退化为 $\mathbb{R}$，问题(1) 退化为文献[3] 所讨论的问题

---

①　收稿日期：2010－04－09

基金项目：西北师范大学科技创新工程项目(nwnu03－69).

作者简介：安蕊莲(1989－)，女，甘肃天水人，硕士研究生，主要从事常微分方程边值问题的研究.

通信作者：韩晓玲，副教授.

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t))=0 & t\in[0,1] \\ x(0)=0 \\ x(1)=\alpha x(\eta) \end{cases}$$

这里 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续. 所以我们的结果是文献[3] 的主要结果的直接推广.

定理 A[1]　令 E 是巴拿赫空间，$K\subset E$ 是 E 中的锥. 设 Ω_1,Ω_2 是 E 中的有界开集，$0\in\Omega_1$，$\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$. 若全连续算子 $A: K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\longrightarrow K$ 满足以下 2 条中的 1 条：

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|(x\in K\cap\partial\Omega_1)$，且 $\|Ax\|\geqslant\|x\|(x\in K\cap\partial\Omega_2)$；

(ii) $\|Ax\|\geqslant\|x\|(x\in K\cap\partial\Omega_1)$，且 $\|Ax\|\leqslant\|x\|(x\in K\cap\partial\Omega_2)$.

则算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中有 1 个不动点.

本文总假定：

(H1) $0<\eta<1$，$0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$；

(H2) $f\in C([0,1]\times C_r^+,[0,\infty))$；

(H3) $\varphi\in C_r^+$.

记

$$f_0=\lim_{v\in C_r^+,\ \|v\|_{[-r,0]}\to 0}\frac{f(t,v)}{\|v\|}\qquad f_\infty=\lim_{v\in C_r^+,\ \|v\|_{[-r,0]}\to\infty}\frac{f(t,v)}{\|v\|}$$

定义 1　称 x 是问题(1) 的正解是指 x 满足问题(1)，且 $x(t)\in C^2[0,1]\cap C[-r,1]$，其中 $x(t)\geqslant 0$ $(t\in[-r,1])$，$x(t)\not\equiv 0$ $(t\in[0,1])$.

1　预备知识

引理 1[7]　设 $0<\eta<1$，$0<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$，$k(t,s)$ 为问题

$$\begin{cases} -x''(t)=0 \\ x(0)=0 \\ x(1)=0 \end{cases}$$

的格林函数，即

$$k(t,s)=\begin{cases}(1-t)\,s & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ (1-s)\,t & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

则问题(1) 的格林函数 $G(t,s)$ 可由下式给出：

$$G(t,s)=k(t,s)+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}k(\eta,s)$$

从而边值问题(1) 等价于积分方程

$$Ax(t):=x(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 k(t,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s & t\in[0,1]\\ \varphi(t) & t\in[-r,0]\end{cases}\tag{2}$$

引理 2　若条件(H1)－(H3) 成立，令 $K=\{x\in C[-r,1]\mid x(t)\geqslant 0\}$，算子 A 如方程(2) 定义，则

(i) K 是 $C[-r,1]$ 中的锥；

(ii) $AK\subset K$；

(iii) $A: K\longrightarrow K$ 全连续.

证　结论(i),(ii) 显然. 下证结论(iii). 先证 $A: K\longrightarrow K$ 连续. 设 $y_n,y^*\in K$，且满足

$$\|y_n-y^*\|\to 0\qquad n\to\infty$$

则存在 $M_0>0$，使得 $\sup\{\|y_n\|,\|y^*\|\}\leqslant M_0$，且

$$\|Ay_n(t)-Ay^*(t)\| = \max_{t\in[-r,1]} |Ay_n(t)-Ay^*(t)| \leqslant \max_{t\in[-r,0]} |Ay_n(t)-Ay^*(t)| + \max_{t\in[0,1]} |Ay_n(t)-Ay^*(t)| \leqslant \int_0^1 k(s,s)|f(s,y_n)-f(s,y^*)|\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 k(\eta,s)|f(s,y_n)-f(s,y^*)|\mathrm{d}s$$

由 f 在 $[0,1]\times[-M_0,M_0]$ 上的一致连续性可推知 $\|Ay_n-Ay^*\|\to 0\ (n\to\infty)$.

再证 A 紧. 对 $B\subset C[-r,1]$，且 B 有界，由 Ascoli-Arzela 定理，只要证 $A(B)$ 有界且等度连续即可.

因为 $\{x_t \mid x\in B, t\in[0,1]\}$ 一致有界，且 $x_t\in C_r$，所以

$$\max\{|f(s,x_s)| \mid x\in B, s\in[0,1]\}\leqslant C^*$$

从而

$$|Ax(t)|\leqslant\begin{cases}[|\int_0^1 k(s,s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^1 k(\eta,s)\mathrm{d}s|]C^*\\ \|\varphi\|_{[-r,0]}\end{cases}$$

因此 $A(B)$ 为 K 中的有界集. 对 $x\in B$，$t_1,t_2\in[-r,1]$，$t_1<t_2$，下面分 3 种情形讨论.

1) 当 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$ 时，有

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)|\leqslant\int_0^1 |k(t_1,s)-k(t_2,s)|f(s,x_s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s\leqslant (C^*+M^*)\varepsilon$$

其中

$$M^*=\max\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s \mid x_s\in B\right\}$$

2) 当 $-r\leqslant t_1<t_2\leqslant 0$ 时，有 $|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leqslant|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|$；

3) 当 $-r\leqslant t_1<0<t_2\leqslant 1$ 时，有

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leqslant|Ax(t_2)-Ax(0)|+|Ax(0)-Ax(t_1)|\leqslant \int_0^1 |k(t_2,s)-k(0,s)|f(s,x_s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha|t_2-0|}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s+|\varphi(0)-\varphi(t_1)|$$

不管何种情形，由 $k(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的一致连续性以及 $\varphi(t)$ 在 $[-r,0]$ 上的一致连续性知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|t_2-t_1|<\delta$ 时，有 $|Ax(t_2)-Ax(t_1)|<\varepsilon$，从而 $A(B)$ 等度连续，所以 $A: K\longrightarrow K$ 全连续.

引理 3　存在 $\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得对 $\forall x\in K$，$\forall\tau\in[\sigma,1-\sigma]$，有 $\|x_\tau\|_{[-r,0]}\geqslant\gamma\|x\|_{[0,1]}$. 其中 $\gamma=\min\left\{\frac{\delta}{t_0},\frac{1-\tau}{1-t_0}\right\}$.

证　令 $\delta=\max\left\{\tau-r,\frac{\tau}{2}\right\}$，使得对 $\forall x\in K$，$\forall\tau\in[\sigma,1-\sigma]$，有

$$\|x_\tau\|_{[-r,0]}=\max_{s\in[-r,0]}|x(\tau+s)|=\max_{t\in[\tau-r,\tau]}|x(t)|\geqslant\max_{t\in[\delta,\tau]}|x(t)|\geqslant\min_{t\in[\delta,\tau]}x(t)$$

因为 $x(t)$ 上凸，且 $x(t)\geqslant 0$，则必存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $x(t_0)=\|x\|_{[0,1]}$. 下面分 3 种情况证明 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|_{[0,1]}$.

1) 若 $\delta<\tau\leqslant t_0$，则 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]}x(t)=x(\delta)$，由 x 的凸性可知 $\frac{x(\delta)}{\delta}\geqslant\frac{x(t_0)}{t_0}$，所以 $x(\delta)\geqslant\frac{\delta}{t_0}x(t_0)$. 即

$\min\limits_{t\in[\delta,\tau]} x(t) \geqslant \dfrac{\delta}{t_0}\|x\|_{[0,1]}$.

2）若 $t_0 \leqslant \delta < \tau$，则 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]} x(t) = x(\tau)$，由 x 的凸性以及引理 1 可知

$$x(t_0) \leqslant x(1) + \frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t_0-1) \leqslant \frac{(t_0-\tau)x(1)}{1-\tau} + \frac{1-t_0}{1-\tau}x(\tau) \leqslant \frac{1-t_0}{1-\tau}x(\tau)$$

所以 $x(\tau) \geqslant \dfrac{1-\tau}{1-t_0}x(t_0)$. 即 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]} x(t) \geqslant \dfrac{1-\tau}{1-t_0}\|x\|_{[0,1]}$.

3）若 $\delta < t_0 < \tau$，则 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]} x(t) = \min\{x(\delta), x(\tau)\}$. 当 $x(\delta) < x(\tau)$ 时，此种情形同情况 1)；当 $x(\delta) \geqslant x(\tau)$ 时，此种情形同情况 2).

由以上叙述可知，只要令 $\gamma = \min\left\{\dfrac{\delta}{t_0}, \dfrac{1-\tau}{1-t_0}\right\}$，就有 $\min\limits_{t\in[\delta,\tau]} x(t) \geqslant \gamma\|x\|_{[0,1]}$.

2　主要结果

定理 1　设条件(H1)－(H3) 成立，并假设以下条件成立

(A1) 存在常数 $H_1 \geqslant \|\varphi\|_{[-r,0]}$，使得 $f(t, v) \leqslant \varepsilon\|v\|_{[-r,0]}$，其中 $t\in[0,1]$，$v\in C_r^+$，$\|v\|_{[-r,0]} \leqslant H_1$，且 ε 满足 $\dfrac{1}{1-\alpha\eta}\displaystyle\int_0^1 (1-s)\varepsilon H_1 \mathrm{d}s \leqslant H_1$；

(A2) $f_\infty = \infty$.

则问题(1)－(2) 存在 1 个正解.

证　若 $x\in K$，且 $\|x\|_{[-r,1]} = H_1$，则由条件(A1) 可得，当 $t\in[0,1]$ 时有

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)\varepsilon\|x_s\|_{[-r,0]}\mathrm{d}s \leqslant H_1$$

当 $t\in[-r,0]$ 时有 $Ax(t) = \varphi(t) \leqslant \|\varphi\|_{[-r,0]} \leqslant H_1$.

取 $\Omega_1 = \{x\in C[-r,1] \mid \|x\|_{[-r,1]} < H_1\}$，则当 $x\in K\cap\partial\Omega_1$ 时，有 $\|Ax\|_{[-r,1]} \leqslant \|x\|_{[-r,1]}$. 又由条件(A2)，可取 H_2 充分大，且满足 $H_2 > \max\{H_1, \|\varphi\|_{[-r,0]}\}$，使得 $f(t,v) \geqslant M\|v\|_{[-r,0]}$，其中 $v\in C_r^+$，$\|v\|_{[-r,0]} \geqslant H_2$，且 M 满足 $M\gamma\cdot\dfrac{\eta}{1-\alpha\eta}\displaystyle\int_\eta^{1-\eta}(1-s)\mathrm{d}s \geqslant 1$. 则对 $x\in K$，$\|x\|_{[-r,1]} = H_2$，由引理 3 有

$$Ax(\eta) = -\int_0^\eta (\eta-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s + \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^1(1-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s \geqslant M\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^{1-\eta}(1-s)\|x_s\|_{[-r,0]}\mathrm{d}s \geqslant M\gamma\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^{1-\eta}(1-s)\|x\|_{[0,1]}\mathrm{d}s = M\gamma\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_\eta^{1-\eta}(1-s)\|x\|_{[-r,1]}\mathrm{d}s \geqslant H_2$$

取 $\Omega_2 = \{x\in C[-r,1] \mid \|x\|_{[-r,1]} < H_2\}$，则当 $x\in K\cap\partial\Omega_2$ 时，有 $\|Ax\|_{[-r,1]} \geqslant \|x\|_{[-r,1]}$. 由定理 A(i) 知，$A$ 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中有 1 个不动点 x，满足

$$H_1 \leqslant \|x\| \leqslant H_2$$

定理 2　设条件(H1)－(H3) 成立，并假设以下条件成立

(A3) 存在常数 $H_3 > 0$，使得 $f(t,v) \geqslant M\cdot\max\{\|v\|_{[-r,0]}, \|\varphi\|_{[-r,0]}\}$，其中 $v\in C_r^+$，$\|v\|_{[-r,0]} \leqslant$

H_3，且 M 满足 $M\gamma\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_{\eta}^{1-\eta}(1-s)\mathrm{d}s\geqslant 1$；

(A4) $f_{\infty}=0$.

则问题(1)存在1个正解.

证 若 $x\in K$，且 $\|x\|_{[-r,1]}=H_3$，则由条件(A3)和引理3可得

$$
\begin{aligned}
Ax(\eta)\geqslant&\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_{\eta}^{1}(1-s)f(s,x_s)\mathrm{d}s\geqslant\\
&M\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_{\eta}^{1-\eta}(1-s)\mathrm{d}s\cdot\max\{\|x_s\|_{[-r,0]},\|\varphi\|_{[-r,0]}\}\geqslant\\
&M\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_{\eta}^{1-\eta}(1-s)\mathrm{d}s\cdot\max\{\gamma\|x\|_{[0,1]},\gamma\|\varphi\|_{[-r,0]}\}\geqslant\\
&M\gamma\cdot\frac{\eta}{1-\alpha\eta}\int_{\eta}^{1-\eta}(1-s)\mathrm{d}s\cdot\|x\|_{[-r,1]}\geqslant H_3
\end{aligned}
$$

取 $\Omega_3=\{x\in C[-r,1]\mid\|x\|_{[-r,1]}<H_3\}$，则 $\|Ax\|_{[-r,1]}\geqslant\|x\|_{[-r,1]}$ $(x\in K\cap\partial\Omega_3)$. 以下分2种情形证明.

情形1 当 f 有界时，存在 $N>0$，使得 $f(t,v)\leqslant N$，其中 $t\in[0,1]$，$v\in C_r^+$. 选择 $R_1\geqslant\max\{\|\varphi\|_{[-r,0]},H_3,\frac{N}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s\}$. 则对 $x\in K$，$\|x\|_{[-r,1]}=R_1$，当 $t\in[0,1]$ 时有

$$
\begin{aligned}
Ax(t)=&\int_0^1 k(t,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\frac{N}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s\leqslant R_1
\end{aligned}
$$

当 $t\in[-r,0]$ 时有 $Ax(t)=\varphi(t)\leqslant\|\varphi\|_{[-r,0]}\leqslant R_1$.

情形2 当 f 无界时，存在 $t_0\in[0,1]$，$R_2>\max\{\|\varphi\|_{[-r,0]},H_3\}$，使得 $f(t,v)\leqslant f(t_0,R_2)$，其中 $t\in[0,1]$，$v\in C_r^+$，$\|v\|_{[-r,0]}\in[0,R_2]$. 且存在 ε 满足 $\frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s\leqslant 1$. 则对 $x\in K$，$\|x\|_{[-r,1]}=R_2$，当 $t\in[0,1]$ 时有

$$
\begin{aligned}
Ax(t)=&\int_0^1 k(t,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 k(\eta,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s\cdot f(t_0,R_2)\leqslant\\
&\frac{\varepsilon}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s\cdot R_2\leqslant R_2
\end{aligned}
$$

当 $t\in[-r,0]$ 时有 $Ax(t)=\varphi(t)\leqslant\|\varphi\|_{[-r,0]}\leqslant R_2$.

令 $H_4=\max\{R_1,R_2\}$，则不论 f 属于那种情形，只要令

$$\Omega_4=\{x\in C[-r,1]\mid\|x\|_{[-r,1]}<H_4\}$$

就有 $\|Ax\|_{[-r,1]}\leqslant\|x\|_{[-r,1]}$ $(x\in K\cap\partial\Omega_4)$.

由定理A(ii)知 A 有1个不动点 x^*，且

$$H_3\leqslant\|x^*\|\leqslant H_4$$

参考文献：

[1] MA R Y. Positive Solutions for Boundary Value Problems of Functional Differential Equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 193: 66-72.

[2] WONG F H. Existence of Positive Solutions for Second Order Functional Differential Equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56: 2580-2587.

[3] MA R Y. Positive Solutions for a Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem [J]. Electronic Journal of Differential

Equations，1999，34：1－8.

[4] WANG H Y. Positive Periodic Solutions of Functional Differential Equations [J]. Differential Equations，2004，202(4)：354－366.

[5] HAN X L. Positive Solutions for a Three-Point Boundary Value Problem [J]. Nonlinear Analysis，2007，663：679－688.

[6] HAN X L. Positive Solutions for a Three-Point Boundary Value Problem at Resonance [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，336(1)：556－568.

[7] 徐登洲，马如云. 线性微分方程的非线性扰动 [M]. 北京：科学出版社，2008：213－239.

[8] 马如云，范虹霞，韩晓玲. 二阶微分方程无穷多点边值问题的正解 [J]. 数学物理学报，2009，29A(3)：699－706.

[9] 陈顺清. 三阶边值问题两个正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(5)：803－806.

[10] 张宏旺，李永祥. 一类非线性三阶边值问题的单调迭代方法 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(5)：34－37.

[11] 王　媛. 二阶差分方程边值问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(7)：58－62.

The Existence of Positive Solutions for a Second Order Three-Point Boundary Value Problem of Functional Differential Equations

AN Rui-lian，　HAN Xiao-ling

School of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：The existence of positive solutions of the second order three-point boundary value problem of functional differential equations

$$\begin{cases} x''(t) + f(t,\ x_t) = 0 & t \in [0,\ 1] \\ x(0) = 0 \\ x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases}$$

is studied based on the fixed point Theorem in cones，where $0<\eta<1$，$0<\alpha<\frac{1}{\eta}$.

Key words：functional differential equation；positive solution；boundary value problem

责任编辑　廖　坤