第 36 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0021-03

含有亚纯函数系数的二阶线性微分方程的复振荡①

周 鉴

贵州师范大学 数学与计算机科学学院,贵阳 550001

摘要: 研究了 1 类二阶线性微分方程:$f''+A(z)f=0$,得到了当 $A(z)$ 是级为 σ 的亚纯函数时方程的复振荡性质.

关 键 词: 微分方程;亚纯函数;线性无关解;零点收敛指数

中图分类号: O174.52 **文献标志码:** A

文献[1] 讨论了二阶线性微分方程

$$f''+A(z)f=0 \tag{1}$$

中当 $A(z)$ 为超越亚纯函数时解的复振荡问题,得到如下结果:

定理 A[1] 设 $A(z)$ 为超越的有穷 σ 级亚纯函数,且 σ 非正整数. 又设 f_1,f_2 为方程(1) 的任意 2 个线性无关的亚纯解,则当 $\sigma>0$ 时有:$\max\left\{\bar{\lambda}(f_1),\ \bar{\lambda}(f_2),\ \lambda(\frac{1}{f_1})\right\}\geqslant\sigma$;当 $\sigma=0$ 时,f_1 和 f_2 的零点集及 f_1 的极点集至少有 1 个为无穷集.

当 $A(z)$ 为亚纯函数时,本文得到如下研究结果:

定理 设 $A(z)$ 是级为 σ 的亚纯函数,又设 f_1,f_2 为方程(1) 的任意 2 个线性无关的亚纯解. 则当 $\sigma>0$ 且 $\max\left\{\bar{\lambda}(f_1),\ \bar{\lambda}(f_2),\ \lambda(\frac{1}{f_1})\right\}<\sigma$ 时,就有 $A(z)=Q(z)e^{-2G(z)}+P(z)$,且满足:

(ⅰ) $G(z)$ 为非常数整函数,$\sigma(e^{-2G})=\sigma$,$Q(z)$ 和 $P(z)$ 均为亚纯函数,且 $\sigma(Q)<\sigma$,$\sigma(P)<\sigma$;

(ⅱ) $Q(z)$ 和 $P(z)$ 的任何极点为二阶的,$Q(z)$ 的任何零点为 $4n$ 阶的,且在 $Q(z)$ 的任何极点 z_0 处总有

$$(z-z_0)^2Qe^{-2G}\Big|_{z=z_0}=-\frac{1}{4}(\frac{c}{E'(z_0)})^2$$

其中 $(\frac{c}{E'(z_0)})^2$ 为奇数,$E=f_1f_2$,用 $c=W(f_1,f_2)$ 表示由 f_1,f_2 构成的 Wronsky 行列式. 当 $\sigma=0$,且 f_1 和 f_2 的零点集及 f_1 的极点集均为有穷集时,$A(z)$ 必为有理函数.

1 所需引理

引理 1[1] 设 $A(z)$ 为亚纯函数,f_1,f_2 为方程(1) 的任意 2 个线性无关的亚纯解,令 $E=f_1f_2$,$c=W(f_1,\ f_2)$,则

(a) $E(z)$ 的所有零点是单重的;

(b) $E(z)$ 的所有极点为偶数阶的;

(c) 在 $E(z)$ 的任何零点 z_0 处总有:$\frac{c}{E'(z_0)}$ 为奇数.

---

① 收稿日期:2010-03-14

基金项目:贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字 LKS[2009]04 号).

作者简介:周 鉴(1976-),男,贵州贵阳人,硕士,讲师,主要从事复分析方向的研究.

引理 2[1] 设 $A(z)$ 为在单连通区域 D 内的亚纯函数，方程(1) 在 D 内有 2 个线性无关的亚纯解 f_1 和 f_2. 令 $E=f_1f_2$, $c=W(f_1, f_2)$, 则

(a) 如果 z_0 为 f_1 在 D 内的 n 级极点，则 z_0 为 f_2 的 $n+1$ 重零点，或者 z_0 为 f_2 的 n 级极点；

(b) 如果 D 为整个复平面，则有

$$T(r, E)=O(\bar{N}(r, \frac{1}{E})+T(r, A)+\log r) \qquad r\to\infty$$

2 定理的证明

令 $E=f_1f_2$，其中 f_1, f_2 为方程(1) 的任意 2 个线性无关的亚纯解. 由引理 1(a) 知 E 的零点都是单重的. 由假设 $\sigma>0$ 且 $\max\left\{\bar{\lambda}(f_1), \bar{\lambda}(f_2), \lambda(\frac{1}{f_1})\right\}<\sigma$ 知

$$\lambda(E)=\lambda(f_1f_2)\leqslant\max\{\bar{\lambda}(f_1), \bar{\lambda}(f_2)\}<\sigma$$

由引理 2(b) 知

$$T(r, E)=O(\bar{N}(r, \frac{1}{E})+T(r, A)+\log r) \qquad r\to\infty \tag{2}$$

又 $\bar{\lambda}(E)\leqslant\lambda(E)<\sigma$，故 $\sigma(E)\leqslant\sigma(A)=\sigma$，即 $\sigma(E)\leqslant\sigma$. 此外由于

$$A=\langle E, c\rangle=\frac{(E')^2-c^2-2EE''}{4E^2} \qquad c=W(f_1, f_2)$$

应用 Nevanlinna 理论和对数导数引理于(2) 式，当 $r\to\infty$ 时有

$$T(r, A)=T(r, \frac{(E')^2-c^2-2EE''}{4E^2})\leqslant T(r, (E')^2)+T(r, 2EE'')+T(r, 4E^2)+O(1)\leqslant$$
$$2T(r, E')+T(r, E)+T(r, E'')+2T(r, E)+O(1)$$

利用文献[2] 的结论知：$T(r, f^{(l)})\leqslant(l+1)T(r, f)+S(r, f)$. 因此有

$$T(r, A)\leqslant 4T(r, E)+2S(r, E)+T(r, E)+3T(r, E)+S(r, E)+2T(r, E)+O(1)=$$
$$10T(r, E)+3S(r, E)+O(1)$$

故 $\sigma(A)\leqslant\sigma(E)$，即 $\sigma\leqslant\sigma(E)$. 因此可得：$\sigma(E)=\sigma(A)=\sigma$.

另外由引理 2(a) 可知，E 的任何 k 级极点定为 f_1 的 $\frac{k}{2}$ 级极点及 f_2 的 $\frac{k}{2}$ 级极点. 故

$$\lambda(\frac{1}{E})=\lambda(\frac{1}{f_1})<\sigma$$

根据文献[3] 中 Hadamard 因子分解定理关于亚纯函数的推广就有：$E=\frac{G_1}{G_2}e^G$，其中：G_1, G_2 分别为 E 的零点和极点的典范积，且级小于 σ，而 G 为整函数且满足 $\sigma(e^G)=\sigma$. 现将 $E=\frac{G_1}{G_2}e^G$ 代入 $A=\langle E, C\rangle=\frac{(E')^2-C^2-2EE''}{4E^2}$ 得

$$A=-\frac{c^2}{4H^2}e^{-2G}+\frac{1}{4}(\frac{H'}{H}+G')^2-\frac{1}{2}(\frac{H''}{H}+2G'\frac{H'}{H}+(G')^2+G'')$$

其中 $H=\frac{G_1}{G_2}$，则 $\sigma(H)<\sigma$.

若记 $Q=-\frac{c^2}{4H^2}$，$P=\frac{1}{4}(\frac{H'}{H}+G')^2-\frac{1}{2}(\frac{H''}{H}+2G'\frac{H'}{H}+(G')^2+G'')$，则 $A(z)=Q(z)e^{-2G(z)}+P(z)$. 又由于 $\sigma(E)=\sigma$，$\sigma(H)<\sigma$，而 $E=He^G$，结合 Nevanlinna 理论，故 $\sigma(e^{-2G})=\sigma(E)=\sigma>0$. 又 $\sigma(Q)=\sigma(-\frac{c^2}{4H^2})=\sigma(H)<\sigma$，此外由 Nevanlinna 理论知，$\sigma(P)\leqslant\max\{\sigma(H), \sigma(G)\}<\sigma$，因此结论(ⅰ) 成立.

注意到 $Q=-\frac{c^2}{4H^2}$，而 $E=He^G$ 可推得 $H=Ee^{-G}$，故 $Q=-\frac{c^2}{4H^2}=-\frac{c^2}{4e^{-2G}}\frac{1}{E^2}$. 由此可见，$Q$ 的极点必为 E 的零点，而 E 的零点为简单零点. 因此 Q 的极点必为二级极点. 而由 P 的表达式(注意到 G 为整函数)

知 P 的极点或为 H 的零点或为 H 的极点(二级极点).

由前面论证知 $Q=-\frac{c^2}{4e^{-2G}}\frac{1}{E^2}$，故 Q 的零点必为 E 的极点. 由引理 1(b) 知 $E(z)$ 的极点均为偶数级的. 因此 E^2 的极点均为 $4n$ 阶的($n=1,2,\cdots$). 故 Q 的零点必为 $4n$ 重的.

此外对 Q 而言，Q 的极点 z_0 为二级极点，且为 E 的简单零点. 设 $E=(z-z_0)\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，故

$$(z-z_0)^2Qe^{-2G}=-(z-z_0)^2\frac{c^2}{4e^{-2G}}\frac{1}{E^2}e^{-2G}=-\frac{1}{4}(\frac{c}{\varphi(z)})^2$$

又由引理 1(c) 知 $\frac{c}{E'(z_0)}$ 为奇数，而 $E'(z_0)=((z-z_0)\varphi(z))'\big|_{z=z_0}=\varphi(z_0)$，故 $\frac{c}{E'(z_0)}=\frac{c}{\varphi(z_0)}$ 为奇数，即

$$(z-z_0)^2Qe^{-2G}\big|_{z=z_0}=-\frac{1}{4}(\frac{c}{\varphi(z)})^2\Big|_{z=z_0}=-\frac{1}{4}(\frac{c}{\varphi(z_0)})^2=-\frac{1}{4}(\frac{c}{E'(z_0)})^2$$

其中 $(\frac{c}{E'(z_0)})^2$ 为奇数.

当 $\sigma=0$，且 f_1 和 f_2 的零点集及 f_1 的极点集均为有穷集时，易知 E 的零点集有穷，由引理 2(a) 知 E 的极点集也有穷. 又由引理 2(b)，结合 $\lambda(E)=0$ 知 $\sigma(E)=0$，因而 E 为有理函数，又 $A=\langle E,C\rangle=\frac{(E')^2-C^2-2EE''}{4E^2}$，故 A 必为有理函数. 因此结论(ⅱ)成立.

参考文献：

[1] BANK S，LAINE I. On the Zeros of Meromorphic Solutions of Second Order Linear Differential Equations [J]. Comment Math Helv，1983，58：656－677.

[2] HAYMAN W. Meromorphic Function [M]. Oxford：Clarendon Press，1964：56－57.

[3] 梯其玛希 E C. 函数论 [M]. 吴锦，译. 北京：科学出版社，1963.

[4] 胡中伟. 亚纯函数的分担值与正规族 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：48－50.

[5] 孙建武. 具有亏函数的整函数与亚纯函数的复合增长性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2006，31(5)：53－57.

[6] 史仲春，李季龙. 涉及微分多项式权分担值的亚纯函数的唯一性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(1)：18－23.

On the Complex Oscillation of Certain Second Order Linear Differential Equations with Meromophic Coefficients

ZHOU　Jian

School of Mathematics and Computer Sciences，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China

Abstract：The oscillation of the second order linear differential equation $f''+A(z)f=0$ is investigated，and the character of the equation is showed，where $A(z)$ is a meromophic function with order σ.

Key words：differential equation；meromophic function；linearly independent solutions；exponent of covergence of the zero-sequence

责任编辑　廖　坤