第 36 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0014-03

关于简单数序列的一些研究①

王明军

渭南师范学院 数学与信息科学系,陕西 渭南 714000

摘要: 设 n 为正整数,如果 n 的所有真因子的乘积不超过 n,则称 n 为简单数. 利用初等方法研究了简单数序列的性质,并给出了 2 个渐近公式.

关 键 词: 简单数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 **文献标志码:A**

如果正整数 n 的所有真因子的乘积小于或者等于 n,则称正整数 n 为简单数. 设 A 为简单数集合,则 $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,\cdots\}$. 文献[1]提出了研究简单数序列性质的问题;文献[2]研究了 $\sum\limits_{n\in A,\ n\leqslant x} n^k$,$\sum\limits_{a\in A,\ a\leqslant x}\sigma^k(a)$ 和 $\sum\limits_{a\in A,\ a\leqslant x}\varphi^k(a)$ 的渐近公式;文献[3]给出了 $\sum\limits_{n\in A,\ n\leqslant x}\frac{1}{n}$,$\sum\limits_{n\in A,\ n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}$ 以及 $\sum\limits_{n\in A,\ n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)}$ 的渐近公式. 令 $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因数的个数,$\omega(n)$ 表示 n 的不同素因数的个数,即若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$,则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$,$\omega(n)=r$. 在本文中,用初等的方法研究了 $\Omega^k(n)$ 和 $\omega^k(n)$ 在简单数集上的均值的性质,给出了 2 个渐近公式,推广了文献[2]中简单数序列的性质:

定理 1 设 k 是任一非负实数,对任意的 $x\geqslant 3$,$x\in\mathbb{R}$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\Omega^k(n)=\frac{2^{k+1}x}{\ln x}\ln\ln x+C\frac{x}{\ln x}+\frac{2^{k+1}x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

其中 C 为可计算的常数.

定理 2 设 k 是任一非负实数,对任意的 $x\geqslant 3$,$x\in\mathbb{R}$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\omega^k(n)=\frac{2^{k+1}x}{\ln x}\ln\ln x+D\frac{x}{\ln x}+\frac{2^{k+1}x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

其中 D 为可计算的常数.

推论 1 设 $k=1$,对任意的 $x\geqslant 3$,$x\in\mathbb{R}$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\Omega(n)=\frac{4x}{\ln x}\ln\ln x+C\frac{x}{\ln x}+\frac{4x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\omega(n)=\frac{4x}{\ln x}\ln\ln x+D\frac{x}{\ln x}+\frac{4x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

为了证明定理,先引入下面的引理:

引理 1[3] 设 $n\in A$,则有 $n=p$,或 $n=p^2$,或 $n=p^3$,或 $n=pq$ 4 种情形.

引理 2 设 k 是任一非负实数,对任意的 $x\geqslant 2$,$x\in\mathbb{R}$,有渐近公式

---

① 收稿日期:2010-04-13

基金项目:渭南师范学院科研项目(10YKF013);陕西省教育厅科研基金项目(2010JK540).

作者简介:王明军(1972-),男,陕西合阳人,讲师,主要从事数论的研究.

$$\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$$

$$\sum_{p^2\leqslant x}1=\frac{2\sqrt{x}}{\ln x}+\frac{4\sqrt{x}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^3 x}\right)$$

$$\sum_{p^3\leqslant x}1=\frac{3\sqrt[3]{x}}{\ln x}+\frac{9\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x}+O\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x}\right)$$

证　注意到 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O(\frac{x}{\ln^3 x})$，很容易可得上述结论.

引理 3　设 p,q 为不同的素数，则有

$$\sum_{pq\leqslant x}1=\frac{2x}{\ln x}\ln\ln x+A_1\frac{x}{\ln x}+\frac{2x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

证　因为

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right)=\ln\ln x+A_0+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} p}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right)=\ln\ln x+B_0+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{pq\leqslant x}1=&2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}1-(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}1)(\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}1)=\\
&2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{p(\ln x-\ln p)}+\frac{x}{p(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{x}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right)-\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2\sqrt{x}}\right)\right)^2=\\
&2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{p(\ln x-\ln p)}+\frac{x}{p(\ln x-\ln p)^2}\right)+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x}{p\ln^3 x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x}{\ln x}\frac{1}{p(1-\frac{\ln p}{\ln x})}+\frac{x}{\ln^2 x}\frac{1}{p(1-\frac{\ln p}{\ln x})^2}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&\frac{2x}{\ln x}\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right)\right)+\\
&\frac{2x}{\ln^2 x}\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} p}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right)\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&\frac{2x}{\ln x}\left(\ln\ln x+A_0+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+\frac{2x}{\ln^2 x}\left(\ln\ln x+B_0+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=\\
&\frac{2x}{\ln x}\ln\ln x+A_1\frac{x}{\ln x}+\frac{2x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)
\end{aligned}$$

定理 1 的证明：

对任意的 $x\geqslant 3$，$x\in\mathbb{R}$，由引理 1 到引理 3 可以得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\Omega^k(n)=&\sum_{p\leqslant x}\Omega^k(p)+\sum_{p^2\leqslant x}\Omega^k(p^2)+\sum_{p^3\leqslant x}\Omega^k(p^3)+\sum_{pq\leqslant x,\ p\neq q}\Omega^k(pq)=\\
&\sum_{p\leqslant x}1+2^k\sum_{p^2\leqslant x}1+3^k\sum_{p^3\leqslant x}1+2^k\sum_{pq\leqslant x,\ p\neq q}1=\\
&\sum_{p\leqslant x}1+2^k\sum_{pq\leqslant x}1+3^k\sum_{p^3\leqslant x}1=\\
&\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)+2^k\left(\frac{2x}{\ln x}\ln\ln x+A_1\frac{x}{\ln x}+\frac{2x}{\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right)+\\
&3^k\left(\frac{3\sqrt[3]{x}}{\ln x}+\frac{9\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x}+O\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x}\right)\right)=
\end{aligned}$$

$$\frac{2^{k+1}x}{\ln x}\ln\ln x + C\frac{x}{\ln x} + \frac{2^{k+1}x}{\ln^2 x}\ln\ln x + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

这样就完成了定理 1 的证明.

同理可以证明定理 2.

定理 2 的证明:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\omega^k(n) = \sum_{p\leqslant x}\omega^k(p) + \sum_{p^2\leqslant x}\omega^k(p^2) + \sum_{p^3\leqslant x}\omega^k(p^3) + \sum_{pq\leqslant x,\ p\neq q}\omega^k(pq) =$$

$$\sum_{p\leqslant x}1 + (1-2^k)\sum_{p^2\leqslant x}1 + 3^k\sum_{p^3\leqslant x}1 + 2^k\sum_{pq\leqslant x}1 =$$

$$\frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right) + (1-2^k)\left(\frac{2\sqrt{x}}{\ln x} + \frac{4\sqrt{x}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^3 x}\right)\right) +$$

$$\frac{3\sqrt[3]{x}}{\ln x} + \frac{9\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x} + O\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^3 x}\right) + 2^k\left(\frac{2x}{\ln x}\ln\ln x + A_1\frac{x}{\ln x} + \frac{2x}{\ln^2 x}\ln\ln x + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right) =$$

$$\frac{2^{k+1}x}{\ln x}\ln\ln x + D\frac{x}{\ln x} + \frac{2^{k+1}x}{\ln^2 x}\ln\ln x + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.

[2] 刘红艳. 关于简单数序列的均值性质 [J]. 宁夏大学学报:自然科学版, 2003, 24(1): 28—30.

[3] LIU H Y. On the Simple Numbers and the Mean Value Properties [J]. Smarandache Notions Journal, 2002(14): 171—175.

[4] 李青民, 李盛瑜. 无三角形的 $C(l, k)$ 的超欧拉性 [J]. 西南大学学报:自然科学版, 2008, 30(12): 9—12.

[5] 杨闻起. BCK-代数的次极大理想 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2004, 29(1): 38—40.

[6] 黄 炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2010, 35(1): 15—18.

Some Studies on the Sequence of Simple Numbers

WANG Ming-jun

Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan Shannxi 714000, China

Abstract: A number n is called a simple number if the product of its proper divisors is less than or equal to n. Using the elementary method to study the properties of the sequence of simple numbers, and two asymptotic formulas are obtained.

Key words: simple number; mean value; asymptotic formula

责任编辑 廖 坤