第 36 卷 第 3 期 西南师范大学学报（自然科学版） 2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2011

文章编号：1000－5471(2011)03－0007－04

W_rLR-拟正规密码群并半群的一些刻画①

鲜朝霞

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：刻画了 1 类新的正则密码群并半群，即 W_rLR-拟正规密码群并半群．得到这类半群可以唯一地表示为某些完全单半群的特殊的 WR 型半格．同时考察了 W_rLR-拟正规带和 WLR-拟正规纯正群并半群的性质．

关 键 词：W_rLR-拟正规密码群并半群；WLR-拟正规纯正群并半群；W_rLR-拟正规带；WR 型半格

中图分类号：O152.7 **文献标志码：A**

本文得到新的带，即 WLR- 拟正规带，并对 WLR- 拟正规带的特殊情况进行研究．称完全正则半群 S 是纯正群并半群，如果 S 的幂等元集 $E(S)$ 构成 S 的子半群；称纯正群并半群为 $\mathscr{C}$- 纯正群并半群，如果它的幂等元集是 $\mathscr{C}$- 带；称完全正则半群 S 是密码群并半群，如果 S 上的格林关系 $\mathscr{H}$ 是同余；称密码群并半群 S 为 $\mathscr{C}$- 密码群并半群，如果 $S/\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{C}$- 带．

本文若无特别指出，S 均表示完全正则半群．对 $\forall a \in S$，$V(a)$ 表示 a 的所有逆元的全体，a^0 表示 a 所在 $\mathscr{H}$ 类的单位元，a^{-1} 表示 a 在它所在 $\mathscr{H}$ 类里的逆元．$L\mathscr{O}$ 表示局部纯正群并半群簇．

定义 1[1] 令 B 是带．称 B 是左(右)拟正规带，如果对 $\forall e,f,g \in B$，有 $efg = efeg$ ($gfe = gefe$)．记这类带的全体为 $\mathscr{LQNB}$ ($\mathscr{RQNB}$)．

定义 2[1] 令 B 是带．称 B 是正则带，如果对 $\forall e,f,g \in B$，有 $efge = efege$．记这类带的全体为 $\mathscr{ReB}$．

定义 3 令 B 是带．称 B 是 W_rLR- 拟正规带，如果对 $\forall e,f,g \in B$，有 $efg = efeg$ 或 $gfe = gefe$．记这类带的全体为 $\mathscr{WLRQNB}$.

显然，$\mathscr{LQNB} \cup \mathscr{RQNB} \subseteq \mathscr{WLRQNB}$．又已知 $\mathscr{LQNB} \subseteq \mathscr{ReB}$ 和 $\mathscr{RQNB} \subseteq \mathscr{ReB}$，但可以通过以下 2 个例子知道 $\mathscr{ReB}$ 与 $\mathscr{WLRQNB}$ 相互不包含．

例 1[2] 令 $E = \{e,f,g,h,i\}$．则有如下 Cayley 表示

	e	f	g	h	i
e	e	e	e	e	e
f	e	f	e	h	i
g	g	g	g	g	g
h	e	f	i	h	i
i	i	i	i	i	i

的 E 是 WLR- 拟正规带．但 E 不是正则带，因为 $fhgf = hgf = i \neq e = hfgf = fhfgf$．

例 2[2] 令 $E = \{e,f,g,h,i\}$．则有如下 Cayley 表示

---

① 收稿日期：2010－05－20
作者简介：鲜朝霞(1985－)，女，四川南充人，硕士研究生，主要从事半群代数理论的研究．

	e	f	g	h	i
e	e	e	e	h	h
f	e	f	g	h	i
g	g	g	g	i	i
h	e	h	e	h	h
i	g	i	g	i	i

的 E 是正则带. 但 E 不是 WLR- 拟正规带，因为 $eif=hf=h\neq e=ef=hef=eief$ 和 $fie=ie=g\neq e=eg=eig=feie$.

定义 4 令 B 是 WLR- 拟正规带. 称 B 是 W_rLR- 拟正规带，如果 B 还是正则带.

引理 1[1] 令 $S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y}(Y;S_\alpha)$，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，其中 $\alpha\leqslant\beta$. 则

(a) $a^0=(aba)^0$；

(b) $a\mathscr{L}ba$，$a\mathscr{R}ab$；

(c) $a=a(ba)^0=(ab)^0a$.

定理 1 令 B 是带. 则下列 2 条等价：

(i) B 是 W_rLR- 拟正规带；

(ii) $\mathscr{L},\mathscr{R}$ 是 B 上的同余，且对 $\forall e,f,g\in B$ 有 $efg\mathscr{L}feg$ 或 $gef\mathscr{R}gfe$.

证 "(i)$\Longrightarrow$(ii)" 由 B 是正则的，易知 $\mathscr{L},\mathscr{R}$ 是 B 上的同余. 由 B 是 WLR- 拟正规带知，对 $\forall e,f,g\in B$，有 $efg=efeg$ 或 $gfe=gefe$. 又由引理 1 知：$efeg\mathscr{L}feg$，$gefe\mathscr{R}gef$. 若 $efg=efeg$，则 $feg\mathscr{L}efg$；若 $gfe=gefe$，则 $gfe\mathscr{R}gef$.

"(ii)$\Longrightarrow$(i)" 由引理 1 知，对 $\forall e,f\in B$，有 $efe\mathscr{L}fe$，$efe\mathscr{R}ef$. 由 $\mathscr{L},\mathscr{R}$ 是 B 上的同余易知 B 是正则带，且对 $\forall g\in B$，有 $efeg\mathscr{R}efg$ 和 $gefe\mathscr{L}gfe$. 若 $efg\mathscr{L}feg$，则 $efg\mathscr{L}feg\mathscr{L}efeg$，即 $efeg\mathscr{H}efg$，从而 $efeg=efg$. 类似地，若 $gef\mathscr{R}gfe$，则 $gfe=gefe$.

引理 2[1] 令 $S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y}(Y;S_\alpha)$，其中 S_α 是完全单半群. 则以下各条等价：

(a) S 是纯正的；

(b) 对 $\forall\alpha\in Y$，S_α 是纯正的；

(c) 若 $e\in E(S)$，则 $V(e)\subseteq E(S)$.

定理 2 下列各条等价：

(i) S 是 WLR- 拟正规纯正群并半群；

(ii) 对 $\forall a,x,y\in S$，有 $ax^0y=ax^0a^0y$ 或 $yx^0a=ya^0x^0a$；

(iii) 对 $\forall a,b\in S$，$\forall x\in V(a)$，有 $axb=a^0b$ 或 $bxa=ba^0$；

(iv) 对 $\forall e,f\in E(S)$，$\forall a\in S$，有 $eaf=eaef$ 或 $fae=feae$.

证 "(i)$\Longrightarrow$(ii)" 由 $E(S)$ 是 WLR- 拟正规带知，对 $\forall a,x,y\in S$，有 $a^0x^0y^0=a^0x^0a^0y^0$ 或 $y^0x^0a^0=y^0a^0x^0a^0$，易得 $ax^0y=ax^0a^0y$ 或 $yx^0a=ya^0x^0a$.

"(ii)$\Longrightarrow$(iii)" 对 $\forall a,b\in S$，$\forall x\in V(a)$，有 $ax,xa\in E(S)$. 由假设知，$a^0(ax)b=a^0(ax)a^0b$ 或 $b(xa)a^0=ba^0(xa)a^0$，于是 $axb=a^0(ax)b=a^0(ax)a^0b=axa^0b=axaa^{-1}b=aa^{-1}b=a^0b$ 或 $bxa=b(xa)a^0=ba^0(xa)a^0=ba^0xa=ba^{-1}axa=ba^0$.

"(iii)$\Longrightarrow$(i)" 由假设知，对 $\forall e,f,g\in E(S)$，$\forall x\in V(e)$，有 $exx=ex$ 或 $xxe=xe$. 于是 $x=xex=xexx=x^2\in E(S)$ 或 $x=xex=xxex=x^2\in E(S)$，即 $V(e)\subseteq E(S)$. 由引理 2 知，S 是纯正的. 由 $fe\in V(ef)$，有 $efeg=(ef)(fe)g=(ef)^0g=efg$ 或 $gefe=g(ef)(fe)=g(fe)^0=gfe$，从而 S 是 W_rLR- 拟正规纯正群并半群.

"(ii)$\Longrightarrow$(iv)" 易知 S 是纯正的. 由假设知，对 $\forall a,x,y\in S$，若 $ax^0y=ax^0a^0y$，则 $x^0(x^0a)^0a^0=x^0(x^0a)^0x^0a^0$，即 $(x^0a)^0=(x^0a)^0x^0a^0$，从而 $x^0a\mathscr{L}x^0a^0$. 又由引理 1 知，$x^0a\mathscr{R}x^0a^0$，于是 $(x^0a)^0=x^0a^0$. 特别地，对 $\forall e,f\in E(S)$，$\forall a\in S$，有 $aef=aea^0f$，$(ea)^0=ea^0$，易得 $eaef=eaea^0f=ea(ea)^0f=eaf$. 类似地，若 $yx^0a=ya^0x^0a$，则 $fae=feae$.

“(iv)$\Longrightarrow$(ii)”显然成立.

引理 3　令 S 是 WLR- 拟正规密码群并半群. 则对 $\forall e\in E(S)$，eSe 是纯正的，即 $S\in L\mathcal{O}$.

证　对 $\forall e\in E(S)$，$\forall f,g\in E(eSe)$，有 $f=ef=fe$，$g=ge=eg$. 由 $S/\mathcal{H}$ 是 WLR- 拟正规带知，$gfge\mathcal{H}gfe$ 或 $efgfg\mathcal{H}efg$，即 $gfg\mathcal{H}gf$ 或 $gfg\mathcal{H}fg$. 若 $gfg\mathcal{H}gf$，则

$$gf=gf(gf)^0=gf(gfg)^0=gf(gf)^0g=gfg$$

$$fg=fg(fg)^0=f(gfg)^0=f(gf)^0=(fgf)^0$$

即 $gf,fg\in E(S)$，类似地，若 $gfg\mathcal{H}fg$，则 $gf,fg\in E(S)$，从而 eSe 是纯正的.

易有如下结论：

引理 4　令 S 是半群，则下列 2 条等价：

(a) S 是正则密码群并半群；

(b) S 能唯一地表示为某些完全单半群的 WR 型半格.

引理 5　令 $S=\mathscr{WRS}[Y;S_\alpha,\rho_{\alpha,\beta},\Phi_{\alpha,\beta}]$. 对 $\forall a\in S_\alpha$，$\forall b\in S_\beta$ 且 $\alpha\geqslant\beta$，有

$$a*b=(a\Phi^b_{\alpha,\beta})b\qquad b*a=b(a\Phi^b_{\alpha,\beta})$$

定义 5　令 S,T 是 2 个半群，ξ：$S\xrightarrow{\rho}2^T$ 是 1 个关系同态，ρ 是半群 T 上的等价关系. 称 ξ 满足 AS'-条件，如果对 $\forall a\in S$，$\forall b,c\in T$，有

$$\begin{cases}(a\xi^{bc})bc=(a\xi^b)bc\\ b(a\xi^b)=b(a\xi^c)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}bc(a\xi^{bc})=bc(a\xi^c)\\ (a\xi^b)c=(a\xi^c)c\end{cases}$$

易知，若 ξ 满足 AS'- 条件，则 ξ 一定满足 AS- 条件.

引理 6[1]　下列各条等价：

(a) S 是密码群并半群；

(b) S 满足等式 $(a^0b^0)^0=(ab)^0$；

(c) S 满足等式 $a^0(ba)^0=(aba)^0=(ab)^0a^0$.

引理 7[1]　$L\mathcal{O}=[(ax)^0(ay)^0=((ax)^0(ay)^0)^0]$.

定理 3　令 S 是半群. 则下列各条等价：

(i) S 是 W_rLR- 拟正规密码群并半群；

(ii) S 能唯一地表示为某些完全单半群的 WR 型半格，即 $S=\mathscr{WRS}[Y;S_\alpha,\rho_{\alpha,\beta},\Phi_{\alpha,\beta}]$，且 $\Phi_{\alpha,\beta}$：$S_\alpha\xrightarrow{\rho_{\alpha,\beta}}2^{S_\beta}$ 是满足 AS'- 条件的关系同态.

证　“(i)$\Longrightarrow$(ii)”由引理 4 知 $S=\mathscr{WRS}[Y;S_\alpha,\rho_{\alpha,\beta},\Phi_{\alpha,\beta}]$. 对 $\forall a\in S_\alpha$，$\forall b,c\in S_\beta$，有 $\alpha\geqslant\beta$，$a\Phi^b_{\alpha,\beta}=a(ba)^0$. 由 S 是 W_rLR- 拟正规密码群并半群可得 $baca\mathcal{H}bacba$ 或 $acab\mathcal{H}abcab$，即 $(baca)^0=(bacba)^0$ 或 $(acab)^0=(abcab)^0$. 若 $(baca)^0=(bacba)^0$，则由引理 1、引理 3、引理 6 和引理 7，有

$$\begin{aligned}b(a\Phi^c_{\alpha,\beta})&=ba(ca)^0=ba(ba)^0(ca)^0=ba(aba)^0(aca)^0=\\ &ba[(aba)^0(aca)^0]^0=ba(abaca)^0=\\ &ba(baca)^0=ba(bacba)^0=ba(ba)^0=b(a\Phi^c_{\alpha,\beta})\end{aligned}$$

又因为 $(a\Phi^{bc}_{\alpha,\beta})bc=(abc)^0abc=(ab)^0abc=(a\Phi^b_{\alpha,\beta})bc$，类似地，若 $(acab)^0=(abcab)^0$，则 $(a\Phi^b_{\alpha,\beta})c=(a\Phi^c_{\alpha,\beta})c$，且 $bc(a\Phi^{bc}_{\alpha,\beta})=bc(a\Phi^c_{\alpha,\beta})$.

“(ii)$\Longrightarrow$(i)”令 $S=\mathscr{WRS}[Y;S_\alpha,\rho_{\alpha,\beta},\Phi_{\alpha,\beta}]$，由引理 4 知，$S$ 是正则密码群并半群. 由引理 5 知，对 $\forall\alpha,\beta,\gamma\in Y$，$\forall a\in S_\alpha$，$\forall x\in S_\beta$，$\forall y\in S_\gamma$，存在 $\mu,\upsilon\in S_{\alpha\beta}$，$\omega,\sigma,\eta,\zeta\in S_{\alpha\beta\gamma}$ 使得

$$a*x=(a\Phi^\mu_{\alpha,\alpha\beta}(x\Phi^\mu_{\alpha,\alpha\beta})\qquad x*a=(x\Phi^\upsilon_{\alpha,\alpha\beta})(a\Phi^\upsilon_{\alpha,\alpha\beta})$$

$$a*x*y=(a\Phi^\mu_{\alpha,\alpha\beta})(x\Phi^\mu_{\beta,\alpha\beta})\Phi^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}y\Phi^\omega_{\gamma,\alpha\beta\gamma}=(a\Phi^\mu_{\alpha,\alpha\beta}\Phi^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma})(x\Phi^\mu\omega_{\beta,\alpha\beta}\Phi^\omega_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma})y\Phi^\omega_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$$

$$a*x*a*y=(a\Phi^\mu_{\alpha,\alpha\beta})((x\Phi^\mu_{\beta,\alpha\beta})a)y=$$

$$(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu})(x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}})y=$$

$$((a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu})(x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}}))\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}=$$

$$(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma})(x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma})y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}$$

由假设知，$y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}\subseteq\omega\rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\cap\sigma\rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$，这意味着$(\omega,\sigma)\in\rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$. 由 $\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ 是从 $S_{\alpha\beta}$ 到 $S_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 $\rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ 的关系映射可知 $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}=a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega}$，$x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}=x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega}$. 由引理 1 知 $axy\mathcal{R}axay$，再由引理 5 知

$$\begin{aligned}y*x*a=&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\zeta}(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon})\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta}=\\&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\zeta}(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y*a*x*a=&y(a(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}))(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon})=\\&y(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}})(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon})=\\&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\eta}(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}})(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon})\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\eta}=\\&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\eta}(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\eta})(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\eta})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\eta})\end{aligned}$$

类似地，$yxa\mathcal{L}yaxa$. 由假设知

$$\begin{aligned}a*x*y=&(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega})(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega})y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\omega}=\\&(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega})(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\mu}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\omega})y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}y*x*a=&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\zeta}(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})=\\&y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\eta}(x\Phi_{\beta,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^{\upsilon}\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{\zeta})\end{aligned}$$

于是根据引理 1 可得 $axy\mathcal{L}y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\sigma}\mathcal{L}axay$ 或 $yxa\mathcal{R}y\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{\eta}\mathcal{R}yaxa$. 从而 $axy\mathcal{H}axay$ 或 $yxa\mathcal{H}yaxa$，即 S 是 W_rLR- 拟正规密码群并半群.

参考文献：

[1] PETRICH M, REILLY N. Completely Regular Semigroups [M]. New York: John Wiley & Sons, 1999: 74－75.

[2] STOJAN B. Semigroups With a System of Subsemigroups [M]. Serbia: Pub of Novi Sad, 1985: 159－172.

[3] 黄 磊，喻厚义，谷伟平. 稠密相对正则语言的一些性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：49－51.

[4] 李映辉，王守峰，张荣华. 逆半直积的推广 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(4)：11－14.

[5] 程莉芳，孔祥智. 正规 $\mathcal{H}^{\#}$-富足半群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(5)：12－14.

Some Characterizations of W_rLR-Quasinormal Cryptogroups

XIAN Zhao-xia

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Some characterizations of W_rLR-quasinormal cryptogroups are given, namely, they can be uniquely expressed as an especial type WR semilattices of some completely simple semigroups. W_rLR-quasinormal bands and WLR-quasinormal orthogroups are also investigated.

Key words: W_rLR-quasinormal cryptogroup; WLR-quasinormal orthogroup; W_rLR-quasinormal band; WR semilattice

责任编辑 廖 坤