第 36 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2011 年 6 月
Vol. 36 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2011

文章编号:1000-5471(2011)03-0004-03

含有 CC-子群的有限群[①]

蔡 一， 吕 恒， 陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 在不用单群分类定理的情况下，给出了非平凡 CC-子群是极大子群的有限群的分类. 另外，还给出了每个极小子群都是 CC-子群的有限群和每个次正规子群都是 CC-子群的有限群的分类.

关 键 词： 有限群；Hall 子群；CC-子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**

对含有 CC-子群[1-4] 的有限群的研究已有 100 多年的历史. 设 G 为有限群，$H \leqslant G$. 称 H 为 G 的 CC-子群，如果对任意的 $1 \neq x \in H$，都有 $C_G(x) \leqslant H$ 成立. 显然每个群 G 本身都为 CC-子群，我们称之为平凡的 CC-子群. 当然并不是所有群都含有非平凡的 CC-子群，如：幂零群就不含有真 CC-子群. 事实上，Frobenius 群的 Frobenius 核和补都是 CC-子群. 1962 年，文献[3]确定了含有 1 个 3 阶 CC-子群的群的结构，还得出了：若 G 为单群，则 $G \cong A_5$ 或者 $G \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$. 2004 年，文献[4]给出了存在 1 个 CC-子群的群的结构.

本文希望在不用单群分类定理的情况下，研究含有 CC-子群的有限群的结构，给出非平凡 CC-子群是极大子群的有限群的分类，并给出每个极小子群都是 CC-子群的有限群和每个次正规子群都是 CC-子群的有限群的分类.

本文中用 $H \prec G$ 表示 H 为 G 的 CC-子群，其余符号是标准的.

引理 1[2]　设 G 为有限群，若 $H \prec G$，则 H 为 G 的 Hall 子群.

引理 2[2]　设 G 为有限群，若 $H \prec G$，则 $H^g \prec G$.

引理 3[1]　设 G 为有限群，且 G 的 Sylow 子群均为循环群. 若 G 交换，则 G 为循环群；若 G 非交换，则 G 为由下列定义关系确定的亚循环群：$G = \langle a, b\rangle$，$a^m = b^n = 1$，$b^{-1}ab = a^r$，$((r-1)n, m) = 1$，$r^n \equiv 1 \pmod m$，$|G| = mn$.

定理 1　设 G 为有限群，若 G 的每个极小子群均为 CC-子群，则 $|G| = pq$.

证　由于 G 的每个极小子群均为素数阶循环群，故对任意 $p \in \pi(G)$，p 阶群均为 CC-子群. 由引理 1 知，p 阶群均为 G 的 Sylow 子群，于是 $|G| = p_1 p_2 \cdots p_s$. 显然 G 的 Sylow 子群均为循环群，由于 G 存在 CC-子群，故 G 非交换. 由引理 3，不妨设 $|\langle a\rangle| = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}$ $(1 \leqslant t < s)$. 显然 $\langle a\rangle$ 的 Sylow 子群均为 G 的 CC-子群，于是 $t = 1$，即 $|\langle a\rangle|$ 只含有 1 个素因子. 同理可证明 $|\langle b\rangle|$ 只含有 1 个素因子，则 $|G| = pq$.

定理 2　若 G 的每个次正规子群均为 CC-子群，且 G 不是单群，则 $|G| = pq$.

证　设 $N \lhd G$，取 p 元 p_0 ($p \in \pi(G)$，且 $p \nmid |N|$). 由于 $N \prec G$，故 $\langle p_0\rangle$ 作用在 N 上为 1 个 p 阶无

---

① 收稿日期：2010-05-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771172)；数学天元基金(10926030)；西南大学专项基金(XDJK2009C068).
作者简介：蔡 一(1984-)，男，四川三台人，硕士研究生，主要从事有限群论的研究.
通信作者：吕 恒，副教授.

不动点的自同构，于是 N 为幂零群．又因为幂零群的任意子群都为次正规子群，即 N 的子群都为 G 的次正规子群，于是 N 为 CC- 子群．又因为幂零群无 CC- 子群，那么 N 就只含有平凡子群，于是 $|N|=q$．又因为 $C_G(N)=N$，于是有 $G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)$，于是 G/N 为交换群．我们说 G/N 为 1 个素数阶群，否则 G/N 必存在非平凡正规子群 M/N，于是 $M\lhd G$，同上可以证明 $|M|=q$．与 M/N 为非平凡正规子群矛盾．于是有 $|G|=pq$．

定理 3　若 G 的非平凡 CC- 子群是极大子群，则 $|G|=pq^n$，且 $n\leqslant p-1$．特别地，当 $n=p-1$ 时，有 $G=\langle a\rangle \ltimes N$．其中 $\langle a\rangle$ 为 p 阶子群，$N=\langle b_1\rangle\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_{p-1}\rangle$，$b_i^a=b_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,p-2)$，$b_{p-1}^a=b_1^{-1}b_2^{-1}\cdots b_{p-1}^{-1}$．

证　设 $M<G$，于是 M 为 G 之极大子群，我们分以下 2 种情况讨论：

(i) 若 $M\lhd G$，则 $|G/M|=p$，不妨设 $|\langle a\rangle|=p$，则 $G=M\langle a\rangle$，我们来证明 $\langle a\rangle<G$．若 $\langle a\rangle\not< G$，必存在 $a_0\in\langle a\rangle$，则 $|C_G(a_0)|>|\langle a\rangle|$，那么 $C_G(a_0)$ 中必含有 r 元 r_0，使得 $r_0\in M^{g_0}$，其中 M^{g_0} 为 M 的某个共轭．于是 $M\not< G$，矛盾．于是 $\langle a\rangle$ 为 G 的极大子群．用 $\langle a\rangle$ 共轭作用于 M 上，显然此作用为 1 个 p 阶无不动点的自同构，于是 M 为幂零群．若 M 的素因子个数大于等于 2，因 M 的 Sylow 子群为 M 的特征子群，那么 M 中必存在 G 的正规子群 H．那么 $\langle a\rangle H<G$，与 $\langle a\rangle$ 为 G 的极大子群相矛盾．于是 $|M|=q^n$，于是有 $|G|=pq^n$．

(ii) 若 $M\ntriangleleft G$，于是 $N_G(M)=M$，设 M^g 为 M 的某个共轭，$g\in G-M$，若 $M\cap M^g\neq 1$，那么 $M\cap M^g$ 为 G 的 CC- 子群，于是为 G 的极大子群，从而有 $M\cap M^g=M=M^g$，有 $g\in M$，矛盾．于是 G 是以 M 为 Frobenius 补的 Frobenius 群，设 N 为其核．由于 Frobenius 核和补都是 CC- 子群，故 Frobenius 核和补都是极大子群．由于 Frobenius 核是正规的幂零群，于是 $|M|=p$．若 N 的素因子个数大于等于 2，因 N 的 Sylow 子群为 N 的特征子群，那么 N 中必存在 G 的正规子群 H．那么 $MH<G$，与 M 为 G 的极大子群相矛盾．于是 $|N|=q^n$，于是有 $|G|=pq^n$．

综合以上 2 种情况，设 N 为上述 2 种情况中的正规子群，则均有 $|G|=pq^n$，且 $|N|=q^n$．由条件，N 必为特征单群．前面已经证明了 N 是幂零群，故 N 为初等 Abel q-群．

下面我们来说明必有 $n\leqslant p-1$．我们先来证明 $n\leqslant p$．若 $n>p$，则可设 $N=\langle b_1\rangle\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_n\rangle$，设 P 为 p 阶子群，且 $P=\langle a\rangle$，那么 $\langle b,b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle\trianglelefteq G$，且 $\langle b,b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle<N$，于是 $P\langle b,b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle$ 含有 CC- 子群 P，与 P 的极大性相矛盾，于是有 $n\leqslant p$．对于 $g=bb^a\cdots b^{a^{p-1}}$，有 $g^a=bb^a\cdots b^{a^{p-1}}$，于是 $g\in Z(G)$．若 $g\neq 1$，则 G 不含有 CC- 子群，矛盾．于是必有 $g=1$，由 $g=bb^a\cdots b^{a^{p-1}}$ 可得到 $b\in\langle b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle$，即 $\langle b,b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle=\langle b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle$．若 $n=p$，则 $P\langle b^a,\cdots,b^{a^{p-1}}\rangle$ 含有 CC- 子群 P，与 P 的极大性相矛盾．于是有 $n\leqslant p-1$．

当 $n=p-1$ 时，令 $b_1=b$，$b_2=b^a$，$\cdots$，$b_{p-1}=b^{a^{p-2}}$，于是有 $b^{a^{p-1}}\in\langle b_1,\cdots,b_{p-1}\rangle$ 且

$$N=\langle b\rangle^G=\langle b_1\rangle\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_{p-1}\rangle$$

即存在整数 l_i $(i=1,\cdots,p-1)$，使得 $b^{a^{p-1}}=b_1^{l_1}b_2^{l_2}\cdots b_{p-1}^{l_{p-1}}$，于是有

$$b^{a^{p-1}a}=(b_1^a)^{l_1}(b_2^a)^{l_2}\cdots(b_{p-1}^a)^{l_{p-1}}=b_2^{l_1}b_3^{l_2}\cdots b_{p-1}^{l_{p-2}}(b^{a^{p-1}})^{l_{p-1}}=b=b_1$$

再代入，于是有 $b_2^{l_1}b_3^{l_2}\cdots b_{p-1}^{l_{p-2}}(b_1^{l_1}b_2^{l_2}\cdots b_{p-1}^{l_{p-1}})^{l_{p-1}}=b_1$．从而得到下面的不定方程组

$$\begin{cases} l_1l_{p-1}\equiv 1\ (\bmod q)\\ l_1+l_2l_{p-1}\equiv 0\ (\bmod q)\\ \vdots\\ l_{p-2}+l_{p-1}^2\equiv 0\ (\bmod q)\end{cases}$$

解之可以推得 $l_i\equiv -1\ (\bmod q)$ 满足方程组，于是有 $b^{a^{p-1}}=b_1^{-1}b_2^{-1}\cdots b_{p-1}^{-1}$．此时，$G$ 的结构为 $G=\langle a\rangle\ltimes N$，其中 $\langle a\rangle$ 为 p 阶子群，$N=\langle b_1\rangle\times\langle b_2\rangle\times\cdots\times\langle b_{p-1}\rangle$，$b_i^a=b_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,p-2)$，$b_{p-1}^a=b_1^{-1}b_2^{-1}\cdots b_{p-1}^{-1}$．证明完毕．

注: 在单群中,素图不连通的单群通常含有非平凡的CC-子群,因此研究单群中的CC-子群的类型,如CC-子群何时为极大子群也是有意义的问题.

参考文献:

[1] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,1987.
[2] 曹 慧,曹洪平. 有关CC-子群的一些性质[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2008,33(5):4-6.
[3] FEIT W,THOMPSON J G. Finite Groups Which Contain a Self-Centralizing Subgroup of Order 3[J]. Nagoya Math,1962,21:185-197.
[4] ARAD Z,HERFORT W. Classification of Finite Groups with a CC-Subgroup[J]. Comm Algebra,2004,32(6):2087-2098.
[5] 钟春桃. 恰含两个非线性Monolith特征标的有限群[J]. 西南大学学报:自然科学版,2009,31(4):11-15.
[6] 徐海静. 特征标表的零点分布与群的结构[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2006,31(2):13-15.

Finite Groups with Some CC-Subgroups

CAI Yi, LÜ Heng, CHEN Gui-yun
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Finite groups whose nontrivial CC-subgroups are maximal subgroups are classified without using the classification theorem of simple groups. In addition, it also give the classification of finite groups whose minimal subgroups and subnormal subgroups are CC-subgroups respectively.
Key words: finite group; Hall subgroup; CC-subgroup

责任编辑 廖 坤