文章编号:1000－5471(2011)03－0001－03

Gerschgorin 圆盘的分离[①]

张平平，　伍俊良，　胡兴凯

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要: 在 Gerschgorin 圆盘定理的基础上，利用相似矩阵有相同特征值的理论，通过选取恰当的正对角矩阵来缩小圆盘半径，从而达到分离 Gerschgorin 圆盘的目的. 给出了选取正对角阵的方法. 最后通过数值算例验证了所得结果的有效性.

关　键　词: 特征值；圆盘半径；圆盘分离

中图分类号: O151.21　　　　**文献标志码:** A

特征值的估计一直是矩阵分析领域中非常热门的课题，在许多应用领域中起着重要的作用[1]. 对一般复矩阵，有有关矩阵特征值的Schur不等式、Gerschgorin圆盘定理、Ky-Fan不等式、Ostrowski定理等. 本文在 Gerschgorin 圆盘定理的基础上，借助于相似矩阵有相同特征值的理论来相对缩小圆盘半径，从而达到分离 Gerschgorin 圆盘的目的.

文中用 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 表示 n 阶复方阵，$N=\{1, 2, \cdots, n\}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$；$R_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行半径，$C_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ji}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列半径；$s_{ij}=|a_{ii}-a_{jj}|+|a_{ji}|-R_j$，$\Delta_{ij}=s_{ij}^2-4R_i\times|a_{ji}|$.

由 Gerschgorin 圆盘定理[2] 我们可以得到:

① 孤立的 Gerschgorin 圆盘中含有且只含有 1 个特征值，而 s 个连通的 Gerschgorin 圆盘中恰有 s 个特征值，但不保证每个圆盘都一定会含有 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

② 如果 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个圆盘两两互不相交，则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，且每个特征值恰好在孤立的圆盘内.

因此，能否缩小圆盘半径孤立各圆盘是特征值估计和定位的重要课题.

1　主要结果

引理 1[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，且 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为正实数，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值位于如下区域

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z-a_{ii}|\leqslant p_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{|a_{ij}|}{p_j}\right\}$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，若 $|a_{ii}-a_{jj}|>R_i+R_j$，则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个 Gerschgorin 圆盘与第 j 个 Gerschgorin 圆盘可分离.

证　(反证法)若 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个 Gerschgorin 圆盘与第 j 个 Gerschgorin 圆盘相交，则存在复数 z_0，使得 $|z_0-a_{ii}|\leqslant R_i$ 且 $|z_0-a_{jj}|\leqslant R_j$. 又因为

$$|a_{ii}-a_{jj}|=|a_{ii}-z_0+z_0-a_{jj}|\leqslant|z_0-a_{ii}|+|z_0-a_{jj}|\leqslant R_i+R_j$$

这与题设矛盾，从而结论成立.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，若存在 $a>0$，使得

$$|a_{ii}-a_{jj}|>a\times R_i+R_j+(\frac{1}{a}-1)|a_{ji}|$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个 Gerschgorin 圆盘与第 j 个 Gerschgorin 圆盘可分离.

---

① 收稿日期: 2010－04－25

基金项目: 中央高校基金资助项目(CDJXS11100025).

作者简介: 张平平(1985－)，女，江西余干人，博士研究生，主要从事矩阵与数值代数的研究.

证 令 $\boldsymbol{D}_i=\mathrm{diag}(1,\cdots,a,\cdots,1)$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_i^{-1}$，则 $R'_i=a\times R_i$，$R'_j=R_j+\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\times|a_{ji}|$，其中 R'_i 与 R'_j 分别为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行及第 j 行半径. 再利用定理 1 即可证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，若存在 $i_0,j_0\in N$，使得 $R_{i_0}\neq 0$，$s_{i_0j_0}>0$，且 $\Delta_{i_0j_0}>0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i_0 个与第 j_0 个 Gerschgorin 圆盘可分离.

证 由 $s_{i_0j_0}>0$，$\Delta_{i_0j_0}>0$ 及它们之间的表达式可知，方程 $R_{i_0}x^2-s_{i_0j_0}x+|a_{j_0i_0}|=0$ 有 2 个不相等的正根 a_1 与 a_2. 显然，令 $a=\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{s_{i_0j_0}}{2R_{i_0}}>0$，有

$$R_{i_0}a^2-s_{i_0j_0}a+|a_{j_0i_0}|<0$$

整理得 $|a_{i_0i_0}-a_{j_0j_0}|>a\times R_{i_0}+R_{j_0}+(\dfrac{1}{a}-1)\times|a_{j_0i_0}|$，由定理 2 即可证定理 3.

注： 由定理 3 的证明过程可知，通常可令 $a=\dfrac{s_{ij}}{2R_i}$.

文献[3]对圆盘定理进行了改进，为了叙述方便，给出这个定理如下：

定理 A[3] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(可相重)都落在复平面上的 n 个圆盘 $Q_i(\boldsymbol{A})=\{z\,\big|\,|z-a_{ii}|\leqslant\min\{R_i,C_i\},\ i\in N\}$ 的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}Q_i(\boldsymbol{A})$ 中.

从定理 A 的证明可知，虽然 α 可以取 0 到 1 之间的任何数，但 α 一旦给出就是固定的数了，不能再改变，从而定理 A 的结论不成立. 下面我们给出 1 个反例.

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{100}\\ 1000 & 5\end{pmatrix}$$

由定理 A 可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值范围为

$$G=\left\{z\,\middle|\,|z-1|\leqslant\frac{1}{100}\right\}\cup\left\{z\,\middle|\,|z-5|\leqslant\frac{1}{100}\right\}$$

而通过计算可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3+\sqrt{14}$，$\lambda_2=3-\sqrt{14}$. 显然，λ_1,λ_2 均不在 G 内，矛盾.

但若适当地加一些条件，则定理 A 成立.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的 n 个 Gerschgorin 圆盘均两两互不相交，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(可相重)都落在复平面上的 n 个圆盘

$$Q_i(A)=\left\{z\,\middle|\,|z-a_{ii}|\leqslant\min\{R_i,C_i\},\ i\in N\right\}$$

的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}Q_i(\boldsymbol{A})$ 中.

证 对任意的 $i_0\in N$，由 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个 Gerschgorin 圆盘均两两互不相交及 Gerschgorin 圆盘定理[2]知，有且仅有唯一的 $\lambda_{i_0}\in\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，使得 $\lambda_{i_0}\in\{z\,\big|\,|z-a_{i_0i_0}|\leqslant R_{i_0}\}$. 同理，对于 $\boldsymbol{A}^T$，有且仅有唯一的 $\hat{\lambda}_{i_0}\in\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，使得 $\hat{\lambda}_{i_0}\in\{z\,\big|\,|z-a_{i_0i_0}|\leqslant C_{i_0}\}$. 下面分 2 种情况来证明 $\lambda_{i_0}=\hat{\lambda}_{i_0}$.

ⅰ) 若 $R_{i_0}=C_{i_0}$，则 λ_{i_0} 与 $\hat{\lambda}_{i_0}$ 均在 $\boldsymbol{A}$ 的第 i_0 个 Gerschgorin 圆盘内，从而有 $\lambda_{i_0}=\hat{\lambda}_{i_0}$.

ⅱ) 若 $R_{i_0}\neq C_{i_0}$，不防设 $R_{i_0}<C_{i_0}$，则 λ_{i_0} 与 $\hat{\lambda}_{i_0}$ 均在 $\boldsymbol{A}^T$ 的第 i_0 个 Gerschgorin 圆盘内，从而有 $\lambda_{i_0}=\hat{\lambda}_{i_0}$.

所以 $\lambda_{i_0}\in\{z\,\big|\,|z-a_{i_0i_0}|\leqslant\min\{R_{i_0},C_{i_0}\}\}$. 再由 λ_{i_0} 的任意性，定理 4 得证.

2 数值算例

例 2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \dfrac{1}{10} & 9 & \dfrac{1}{10}\\ \dfrac{1}{10} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的 2 个 Gerschgorin 圆盘 Q_1 与 Q_3 相交，因为

$$R_1\neq 0\qquad s_{13}=|1-2|+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}>0$$

$$\Delta_{13}=1^2-4\times 2\times\frac{1}{10}>0$$

所以 Gerschgorin 圆盘 Q_1 与 Q_3 是可以被分离的．取 $a=\dfrac{s_{13}}{2R_1}=\dfrac{1}{4}$，令 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\dfrac{1}{4}，1，1)$，则

$$\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & 9 & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

这时 Q_1 与 Q_3 就已经被分离了，且这 3 个圆盘都被分离开来．由 Gerschgorin 定理可得 3 个特征值的范围分别为 $|\lambda_1-1|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$|\lambda_2-9|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$|\lambda_3-2|\leqslant\dfrac{2}{5}$.

例 3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 2 \\ \frac{1}{10} & 20 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 60 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的 2 个 Gerschgorin 圆盘 Q_1 与 Q_4 相交，因为

$$R_1\neq 0\qquad s_{14}=|-2-3|+0-4>0\qquad \Delta_{14}=1^2-4\times 9\times 0>0$$

所以，Gerschgorin 圆盘 Q_1 与 Q_4 是可以被分离的．取 $a=\dfrac{s_{14}}{2R_1}=\dfrac{1}{2\times 9}=\dfrac{1}{18}$，令 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\dfrac{1}{18}，1，1，1)$，则

$$\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ \frac{9}{5} & 20 & 5 & 2 \\ 18 & 4 & 60 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

这时 Q_1 与 Q_4 就已经被分离了，且这 4 个圆盘都被分离开来．由 Gerschgorin 圆盘定理可得 4 个特征值的范围分别为 $|\lambda_1+2|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$|\lambda_2-20|\leqslant\dfrac{44}{5}$，$|\lambda_3-60|\leqslant 30$，$|\lambda_4-3|\leqslant 4$.

参考文献：

[1]　HORN R A，JOHNSON C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1985.

[2]　高尔腊伊 A R，瓦特桑 G A. 矩阵特征问题的计算方法 [M]. 唐焕文，译. 上海：上海科技出版社，1980.

[3]　钟绍军. 矩阵特征值的估计与定位 [J]. 长沙大学学报：自然科学版，2005，19(5)：21－23.

[4]　胡兴凯，邹黎敏. 矩阵特征值和奇异值的估计 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(3)：40－43.

[5]　胡兴凯，邹黎敏. 矩阵秩和特征值的估计 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(12)：99－102.

[6]　袁通全，韦吉爵. Cohen 实分布函数 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(1)：46－50.

On the Separation of Gerschgorin Circular Discs

ZHANG Ping-ping，　WU Jun-liang，　HU Xing-kai

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：On the basis of Gerschgorin's Theorem，by using the theory that similar matrices have the same eigenvalues，the Gerschgorin circular discs are separated by selecting an appropriate positive diagonal matrix. Moreover，the method of selecting positive diagonal matrix is given，and the effectiveness is verified by numerical examples.

Key words：eigenvalue；circular disc radiu；the separation of circular discs

责任编辑　廖　坤