第 36 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 4 月
Vol. 36 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2011

文章编号:1000-5471(2011)02-0036-03

时标上具有正负项的非线性中立型动力方程非振动解的存在性①

邱聪娜, 李民良, 王 莹, 张丽超

河北科技师范学院 数学与信息科技学院, 河北 秦皇岛 066004

摘要: 研究时标 $\mathbb{T}$ 上的一类二阶非线性中立型动力方程,针对 p 的不同取值分别构造映射,给出非振动解存在性的充分条件,推广了已有的相关结果.

关 键 词: 时标;非线性动力方程;中立型项;正负项;非振动解

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

泛函微分方程的振动性理论是方程定性理论的一个重要分支[1],得到学术界的广泛关注[2-5],而时标上动力方程作为方程的一个新领域,其振动性理论近年来更是引起国内外学者的关注[6-10]. 文献[2]研究了具有正负项的二阶中立型微分方程

$$(x(t)-p(t)x(\tau(t)))''+f_1(t, x(\sigma_1(t)))-f_2(t, x(\sigma_2(t)))=0$$

的非振动解的存在性,本文将此方程推广到时标上,研究时标 $\mathbb{T}$ 上的具有正负项的二阶非线性动力方程

$$(x(t)-p(t)x(\tau(t)))^{\Delta\Delta}+f_1(t, x(\sigma_1(t)))-f_2(t, x(\sigma_2(t)))=0 \tag{1}$$

非振动解的存在性,假设 $\sup\mathbb{T}=\infty$, $t\in[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, $t_0\in\mathbb{T}$.

针对 $p(t)$ 的不同取值分别构造映射,借助 Krasnoselskii 不动点定理、时标上的导数积分运算、链式法则、含参量积分求导及中值定理[10],给出了方程(1) 非振动解存在性的充分条件,推广了已有文献中的相关结果.

定义 1 设 f: $\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^k$,定义 $f^{\Delta}(t)$ 为如下性质的一个数(假定存在),对 $\forall\varepsilon>0$,存在 t 的一个邻域(即 $U=(t-\delta, t+\delta)\cap\mathbb{T}$, 其中 $\delta>0$) 使得对所有 $s\in U$, 有 $|[f(\sigma(t)-f(s))]-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leqslant\varepsilon|\sigma(t)-s|$,则称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ 导数.

定理 方程(1) 中,设

(H_1) $p\in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $\tau, \sigma_i\in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{T})$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty$, $i=1,2$;

(H_2) $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, $\tau(t)$ 严格增, $(\tau^{-1}(t))^{\Delta}$ 有界;

(H_3) $f_i\in C_{rd}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$,当 $u\neq 0$ 时,有 $uf_i(t, u)>0$, $f_i(t, u)$ 关于 u 非减,且存在 $b>0$,使 $\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)f_i(s, b)\Delta s<\infty$, $t\in\mathbb{T}$, $i=1,2$.

若以下条件中任何一个条件成立,则方程(1) 存在有界非振动解:

1) $0\leqslant p(t)\leqslant p<1$,

2) $1<p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2<\infty$,

3) $-1<p\leqslant p(t)<0$,

4) $-\infty<p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2<-1$.

证 1) 当 $0\leqslant p(t)\leqslant p<1$ 时,定义 BC 为 $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ 上具有上确界模的所有连续有界函数的集合.

---

① 收稿日期: 2009-11-23

作者简介: 邱聪娜(1983-),女,河北保定人,讲师,主要从事微分方程的稳定性与振动性研究.

定义 BC 上的子集 $\Omega=\{x\in BC: M_1\leqslant x(t)\leqslant M_2,\ t\geqslant t_0\}$，$M_1>0$，$M_1<(1-p)M_2$，$0<M_2\leqslant b$. 易知 Ω 为 BC 的有界闭凸子集. 设 $\alpha, c>0$ 使 $M_1<\alpha<(1-p)M_2$，$c=\min\{\alpha-M_1,\ (1-p)M_2-\alpha\}$.

利用(H_3)，存在足够大的 $T\geqslant t_0$，使当 $t\geqslant T$ 时，

$$\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)f_i(s,b)\Delta s\leqslant c,\ i=1,2 \tag{2}$$

在 Ω 上定义 Γ_1，Γ_2：

$$(\Gamma_1 x)(t)=\begin{cases}\alpha+p(t)x(\tau(t)) & t\geqslant T\\ (\Gamma_1 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}$$

$$(\Gamma_2 x)(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)[f_2(s,x(\sigma_2(s)))-f_1(s,x(\sigma_1(s)))]\Delta s & t\geqslant T\\ (\Gamma_2 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}$$

(i) 对任意 x，$y\in\Omega$，将证明 Γ_1 为压缩映射. 事实上，

$$(\Gamma_1 x)(t)+(\Gamma_2 y)(t)\geqslant\alpha-c\geqslant M_1,\ (\Gamma_1 x)(t)+(\Gamma_2 y)(t)\leqslant\alpha+pM_2+c\leqslant M_2$$

所以 $\Gamma_1 x+\Gamma_2 y\in\Omega$，且 $0\leqslant p(t)\leqslant p<1$，则 Γ_1 为压缩映射.

(ii) 证明 Γ_2 对 y 连续. 设$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Omega$，当 $y\in\Omega$ 时，有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n-y=0$. 由$(H_3)$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ T'\geqslant T$，使得当 $t\geqslant T'$ 时，有 $\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)|f_1(s,b)-f_2(s,b)|\Delta s<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 则若 $t\geqslant T'$，有 $|(\Gamma_2 y_n)(t)-(\Gamma_2 y)(t)|\leqslant\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)|f_2(s,y_n(\sigma_2(s)))-f_1(s,y_n(\sigma_1(s)))|\Delta s+\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)|f_2(s,y(\sigma_2(s)))-f_1(s,y(\sigma_1(s)))|\Delta s<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

若 $T\leqslant t<T'$，由 f_i 对 y 的连续，知当 $y_n\to y$，有 $|f_i(t,y_n)-f_i(t,y)|<\varepsilon_1$. 从而得$\int_t^{T'}(\sigma(s)-t)|f_i(s,y_n)-f_i(s,y)|\Delta s<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 则存在足够大的 $N>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|(\Gamma_2 y_n)(t)-(\Gamma_2 y)(t)|\leqslant\left(\int_t^{T'}+\int_{T'}^{\infty}\right)(\sigma(s)-t)|[f_2(s,y_n(\sigma(s)))-f_1(s,y_n(\sigma_1(s)))]-[f_2(s,y(\sigma_2(s)))-f_1(s,y(\sigma_1(s)))]|\Delta s<\varepsilon.$$

(iii) 证明 $\Gamma_2\Omega$ 全连续. 易知 $\Gamma_2\Omega$ 在 $\mathbb{T}$ 上一致有界. 由(H_2)和(H_3)，$\exists C>0$，若 $t\geqslant\mathbb{T}$ 时，有

$$|(\Gamma_2 y)^{\Delta}(t)|\leqslant\left|-\int_t^{\infty}[f_2(s,y(\sigma_2(s)))-f_1(s,y(\sigma_1(s)))]\Delta s\right|\leqslant$$
$$\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)|f_2(s,y(\sigma_2(s)))-f_1(s,y(\sigma_1(s)))|\Delta s\leqslant 2C$$

若 $t_0\leqslant t<T$ 时，有 $|(\Gamma_2 y)^{\Delta}(t)|=0$. 从而由时标上的中值定理，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2C}>0$，对一切 $t_1, t_2\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$，当$|t_1-t_2|<\delta$ 时，对 $\forall y\in\Omega$，有

$$|\Gamma_2 y(t_1)-\Gamma_2 y(t_2)|\leqslant\left\{\sup_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}}|(\Gamma_2 y)^{\Delta}(t)|\right\}|t_1-t_2|<\varepsilon$$

从而 $\Gamma_2 y$ 等度连续，所以 Γ_2 全连续. 由 Krasnoselskii 不动点定理，存在 $x\in\Omega$，使 $\Gamma_1 x+\Gamma_2 x=x$. 通过计算，可知 $x(t)$ 是方程(1) 的一个有界非振动解.

2) 当 $1<p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2<\infty$ 时，设

$$(\Gamma_1 x)(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{p(\tau^{-1}(t))}+\dfrac{x(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} & t\geqslant T\\ (\Gamma_1 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}$$

$$(\Gamma_2 x)(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(\tau^{-1}(t))}\displaystyle\int_{\tau^{-1}(t)}^{\infty}(\sigma(s)-\tau^{-1}(t))[f_1(s,x(\sigma_1(s)))-f_2(s,x(\sigma_2(s)))]\Delta s & t\geqslant T\\ (\Gamma_2 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}$$

类似情形 1) 可证方程(1) 存在有界非振动解.

3) 当 $-1<p\leqslant p(t)<0$ 时，设

$$(\Gamma_1 x)(t)=\begin{cases}\alpha+p(t)x(\tau(t)) & t\geqslant T\\ (\Gamma_1 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}$$

$$
(\Gamma_2 x)(t)=\begin{cases}\int_t^{\infty}(\sigma(s)-t)[f_2(s, x(\sigma_2(s)))-f_1(s, x(\sigma_1(s)))]\Delta s & t\geqslant T\\ (\Gamma_2 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}
$$

类似情形1)可证方程(1)存在有界非振动解.

4)当 $-\infty<p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2<-1$ 时,设

$$
(\Gamma_1 x)(t)=\begin{cases}-\dfrac{\alpha}{p(\tau^{-1}(t))}+\dfrac{x(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} & t\geqslant T\\ (\Gamma_1 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}
$$

$$
(\Gamma_2 x)(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(\tau^{-1}(t))}\int_{\tau^{-1}(t)}^{\infty}(\sigma(s)-\tau^{-1}(t))[f_1(s, x(\sigma_1(s)))-f_2(s, x(\sigma_2(s)))]\Delta s & t\geqslant T\\ (\Gamma_2 x)(T) & t_0\leqslant t<T\end{cases}
$$

类似情形1)可证方程(1)存在有界非振动解.

定理证毕.

参考文献:

[1] Erbe H, Kong Q, Zhang B G, Oscillatory Theory for Functional Differential Equation [M]. New York: Dekker, 1995.

[2] ZHANG Zhen-guo, YANG Ai-jun, DI Cong-na. Existence of Positive Solutions of Second-order Nonlinear Neutral Differential Equations with Positive and Negative Terms [J]. Journal of Appled mathe-matics and Compution, 2007, 25: 245-253.

[3] 陈志彬,张爱平,李 蓓. 一类中立型微分方程周期解的存在性与唯一性 [J]. 西南大学学报:自然科学版,2009,31(5):1-5.

[4] 林丹玲. 非线性中立型微分方程的振动准则 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2008,33(1):22-26.

[5] 林文贤. 一类具有连续偏差变元的二阶非线性中立型方程的振动性 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2009,30(4):1-3.

[6] 邸聪娜,邵丽丽,吕金凤,等. 时标上二阶线性中立型动力方程有界解的振动准则 [J]. 河北科技师范学院学报,2009,23(3):58-61.

[7] ZHANG B G, ZHU S. Oscillation of Second Order Nonlinear Delay Dynamic Equations on Time Scales [J]. Computers Math Applic, 2005, 49(4): 599-609.

[8] BOHNER M, SAKER S H. Oscillation of Second-order Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales [J]. Rocky Mountain J Math, 2004, 34(4): 1 239-1 254.

[9] ERBE L, PETERSON A, SAKER S H. Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Delay Dynamic Equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 333: 505-522.

[10] BOHNER M, PEERSON A. Dynamic Equations on Time Scales [M]. Boston: Birkhauser, 2001.

The Existence of Nonoscillatory Solutions for the Second Order Nonlinear Neutral Dynamic Equations with Positive and Negative Terms on Times Scales

DI Cong-na, LI Min-liang, WANG Ying, ZHANG Li-chao

College of Mathematics and Information Technology, Hebei Normal University of Science & Technology, Qinghuangdao Hebei 066004, China

Abstract: Considering the existence of nonoscillatory solutions for the second order nonlinear dynamic equation on times scales, and by defining different mappings, sufficient conditions are obtained for the existence of nonoscillatory solutions of the equations, which extend the corresponding results in the literature.

Key words: time scales; nonlinear dynamic equations; neutral term; positive and negative terms; nonoscillatory solution

责任编辑 张 枸