第 36 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 4 月
Vol. 36 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2011

文章编号:1000-5471(2011)02-0020-04

可交换随机变量序列加权和的另一个大数定律①

黄兆霞

安康学院 数学系,陕西 安康 725000

摘要: 将独立同分布情形下的 Marcinkiewicz 型强大数定律推广到了可交换随机变量,得到了可交换随机变量加权和的一个强大数定律.

关 键 词: 可交换;加权和;大数定律

中图分类号: O211.5 **文献标志码:** A

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布是置换不变的,即对 $1,2,\cdots,n$ 的每一个置换 π,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布与 $X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots, X_{\pi(n)}$ 的联合分布相同,则称随机变量有限列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为可交换的. 显然独立同分布的随机变量序列是最简单的可交换随机变量序列.

本文旨在将文献[1]中关于独立同分布序列的若干强大数律推广到可交换随机变量序列上去. 由于处理随机变量时,采用了不同的截断随机变量取法,从而证明过程比文献[1]简化了许多.

定义 1[2] 在$[0, +\infty)$上的正值函数 $l(x)$ 称为 $x \to +\infty$ 时是慢变化的,如对一切 $c > 0$,有 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{l(cx)}{l(x)} = 1$.

设$\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$是实常数阵列,$A_{\alpha, n}^{\alpha} = n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha}$,且设

$$A_\alpha = \lim_{n \to +\infty} \sup A_\alpha, n < +\infty \tag{1}$$

引理 1[2] 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是可交换随机变量序列,满足

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_1), f_2(X_2)) \leqslant 0$$

$\forall m \geqslant 2$, $A_1, A_2, \cdots A_m$ 是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的两两不交的非空子集,如果 $f_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 是对每个变元都非降(或非升)的函数,则

1) 如果 $f_i \geqslant 0$, $i = 1,2,\cdots,m$,则还有

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_j, j \in A_i)\Big) \leqslant \prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_j, j \in A_i))$$

2) 特别地,对任意 $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\cdots,m$,有

$$P(X_1 < x_1, \cdots, X_m < x_m) \leqslant \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x_i)$$

引理 2 设$\{X, X_n; n \geqslant 1\}$为可交换随机变量序列,且存在 $h > 0$, $r > 0$,使

$$E[\exp(h(x)^r)] < +\infty$$

---

① 收稿日期:2009-11-24

基金项目:陕西省普通本科高等学校教学改革研究项目(09BY70);安康学院教改项目(Jg03215).

作者简介:黄兆霞(1981-),女,山东临沂人,讲师,硕士,主要从事概率极限理论、运筹学、数学建模研究.

$\{X_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是可交换随机变量序列，且满足

$$\operatorname{Cov}(f_1(X_{n1}), f_2(X_{n2})) \leqslant 0$$

$E(X_{ni}) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$n \geqslant 1$，$\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是实常数阵列，若还满足：

1）$E[\exp(h(x)^r)] < +\infty$；

2）存在 β，$0 < \beta \leqslant r$ 及常数 $c > 0$，使得

$$|a_{ni}X_{ni}| \leqslant \frac{c|X_i|^\beta}{\log n} \qquad \text{a. s.}$$

3）存在 $\delta > 0$ 及常数列 $\{v_n, n \geqslant 1\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$，使

$$X_{ni}^2 \sum\nolimits_{i=1}^n a_{ni}^2 \leqslant \frac{v_n|X_i|^\delta}{\log n}\text{a. s.}$$

则

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \to 0 \qquad \text{a. s.}\ (n \to +\infty)$$

证　由文献[3]定理 2.5，类似文献[4]定理 18 的证明可得.

定理　设 $\{X, X_n; n \geqslant 1\}$ 是可交换随机变量序列，满足

$$E[\exp(h(x)^r)] < +\infty \qquad \operatorname{Cov}(f_1(X_1), f_2(X_2)) \leqslant 0$$

其中 $f_i(i = 1, 2)$ 是使上式有意义且对 X_1, X_2 不降的函数，$E(X) = 0$，$\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是实常数阵列，$A_{\alpha,n}^\alpha = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha$，且设

$$A_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\sup A_{\alpha,n} < +\infty \qquad 1 < \alpha \leqslant 2$$

1）若 $0 < r \leqslant 1$，$b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{r}}$ 则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \to 0 \qquad \text{a. s.}\ (n \to +\infty)$$

2）若 $r > 1$，$b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{r+\delta}}$，其中 $\delta = 1 - \dfrac{1}{r} - \dfrac{r-1}{1+\alpha r-\alpha}$，则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \to 0 \qquad \text{a. s.}\ (n \to +\infty)$$

证　不失一般性，对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$，$n \geqslant 1$，令 $a_{ni} > 0$，由文献[5]推论 3 有

$$\left(E\left(\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i\right)\right)^2 \leqslant \frac{E(X^2)}{{b_n}^2}\sum_{i=1}^n {a_{ni}}^2 \leqslant \frac{E(X^2)}{{b_n}^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha\right)^{\frac{2}{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{{b_n}^2}E(X^2)A_{\alpha,n}^\alpha n^{\frac{2}{\alpha}} \to 0(n \to +\infty)$$

则 $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}X_i \xrightarrow{P} 0(n \to +\infty)$.

设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是对称的可交换随机变量序列.

i）$0 < r \leqslant 1$

对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$，$n \geqslant 1$，令

$$X'_{ni} = X_iI(|X_i| \leqslant (\log n)^{\frac{1}{r}}) + (\log n)^{\frac{1}{r}}I(X_i > (\log n)^{\frac{1}{r}}) - (\log n)^{\frac{1}{r}}I(X_i < -(\log n)^{\frac{1}{r}})$$

$$X''_{ni} = X_iI(|X_i| > (\log n)^{\frac{1}{r}}) - (\log n)^{\frac{1}{r}}I(X_i > (\log n)^{\frac{1}{r}}) + (\log n)^{\frac{1}{r}}I(X_i < -(\log n)^{\frac{1}{r}})$$

由于 $E[\exp^{(|X|^\gamma)}] < +\infty$ 等价于 $\sum\limits_{n=1}^n P(|X| > (\log n)^{\frac{1}{r}}) < +\infty$，则有

$$\frac{1}{b_n}\left|\sum_{i=1}^n a_{ni}X''_{ni}\right| \leqslant \frac{1}{b_n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}|\sum_{i=1}^n |X''_{ni}| \leqslant$$

$$A_{\alpha,n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|X''_{ni}|}{(\log n)^{\frac{1}{r}}}\to 0 \text{ a. s. } (n\to+\infty) \tag{2}$$

又$\{X'_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$是可交换的随机变量阵列，且满足定理条件，而

$$\left|\frac{1}{b_n}a_{ni}X'_{ni}\right|\leqslant\frac{1}{b_n}|a_{ni}|(\log n)^{(1-r)}|X_i|^r\leqslant\frac{1}{b_n}A_{\alpha,n}n^{\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{(1-r)}{r}}|X_i|^r=A_{\alpha,n}\frac{|X_i|^r}{\log n} \tag{3}$$

$$X'^2_{ni}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ni}}{b_n}\right)^2\leqslant X_i^2\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\leqslant A^{\alpha}_{\alpha,n}\frac{X_i^2}{(\log n)^{\frac{2}{r}}} \tag{4}$$

由(3),(4)式及引理2，有

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X'_{ni}\to 0 \qquad \text{a. s. } (n\to+\infty) \tag{5}$$

由(2),(5)式得

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i\to 0 \qquad \text{a. s. } (n\to+\infty)$$

ii) $r>1$

$$X'_{ni}=X_iI(|X_i|\leqslant(\log n)^{\delta_1})+(\log n)^{\delta_1}I(X_i>(\log n)^{\delta_1})-(\log n)^{\delta_1}I(X_i<-(\log n)^{\delta_1})$$

$$X''_{ni}=X_iI(|X_i|>(\log n)^{\delta_1})-(\log n)^{\delta_1}I(X_i>(\log n)^{\delta_1})+(\log n)^{\delta_1}I(X_i<-(\log n)^{\delta_1})$$

$$a'_{ni}=a_{ni}I\left(|a_{ni}|\leqslant\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{(\log n)^{\delta_2}}\right)$$

$a''_{ni}=a_{ni}-a'_{ni}$，其中 $\delta_1=\dfrac{1}{(1+\alpha r-\alpha)}$，$\delta_2=1-\dfrac{1}{r}-\delta$，则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i=\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a'_{ni}X'_{ni}+\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a''_{ni}X'_{ni}+\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X''_{ni}\triangleq A_n+B_n+C_n \tag{6}$$

又由于$\{X'_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$是可交换的随机变量阵列，则

$$|b_n^{-1}a'_{ni}X'_{ni}|\leqslant b_n^{-1}|a'_{ni}||X_i|\leqslant\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{b_n(\log n)^{\delta_2}}|X_i|=\frac{1}{\log n}|X_i| \tag{7}$$

$$X'^2_{ni}\sum_{i=1}^{n}b_n^{-2}a'^2_{ni}\leqslant\frac{n^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}}{b_n^2(\log n)^{\delta_2(2-\alpha)}}X'^2_{ni}\leqslant\frac{A^{\alpha}_{\alpha,n}n^{\frac{2}{\alpha}}}{b_n^2(\log n)^{\delta_2(2-\alpha)}}X_i^2=\frac{A^{\alpha}_{\alpha,n}}{(\log n)^{\frac{2}{r}+2\delta+\delta_2(2-\alpha)}}X_i^2 \tag{8}$$

由于$\dfrac{2}{r}+2\delta+\delta_2(2-\alpha)=\dfrac{2+\alpha r-\alpha}{1+\alpha r-\alpha}>1$，从而由(7),(8)式及引理2得

$$A_n\to 0 \qquad \text{a. s. } (n\to+\infty) \tag{9}$$

又

$$|B_n|\leqslant b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^{n}|a''_{ni}|=b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|I\Big(|a_{ni}|>\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{(\log n)^{\delta_2}}\Big)=$$

$$b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}|a_{ni}|^{1-\alpha}I\Big(|a_{ni}|>\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{(\log n)^{\delta_2}}\Big)\leqslant$$

$$b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\left[\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{(\log n)^{\delta_2}}\right]^{1-\alpha}=$$

$$\left(n^{\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{r+\delta}}\right)^{-1}\frac{(\log n)^{\delta_1}n^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(\log n)^{(1-\alpha)\delta_2}}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}=$$

$$A^{\alpha}_{\alpha,n}$$

即

$$|B_n|\leqslant A^{\alpha}_{\alpha,n} \tag{10}$$

如同 $0 < r \leqslant 1$ 一样，可证

$$C_n \to 0 \qquad \text{a. s.}\ (n \to +\infty) \tag{11}$$

由(6)，(9)，(10)，(11)得

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \frac{1}{b_n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \right| \leqslant A_{\alpha}^{\alpha} \quad \text{a. s.}$$

在上式中，把 X_i 用 tX_i 取代，则有

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \frac{1}{b_n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \right| \leqslant \frac{A_{\alpha}^{\alpha}}{t} \quad \text{a. s.}$$

令 $t \to +\infty$，则得

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \to 0 \ \text{a. s.}\ (n \to +\infty)$$

定理证毕.

参考文献：

[1] SUNG S H. Strong Laws for Weighted Suns of i. i. d Random Variables [J]. Statist Probab Lett，2001，52(4)：413－419.

[2] 吴群英. 混合序列的概率极限理论 [M]. 北京：科学出版社，2006：132－133.

[3] TAYLOR R L，PATTERSON R F. A Strong Laws of Large Numbers for Arrays of Row Wise Negatively Dependent Random Variables [J]. Stochastic Anal，2002，20(3)：643－656.

[4] PETROV B B. 独立随机变量之和的极限定理 [M]. 苏　淳，黄可明，译. 合肥：中国科技大学出版社，1991：83－84.

[5] 杨善朝. 随机变量部分和的矩不等式 [J]. 中国科学：A 辑，2000，30(3)：218－223.

Other Strong Law of Large Numbers About Weighted Sum of Exchangeable Random Variables

HUANG Zhao-xia

Department of Mathematics，AnKang University，AnKang Shanxi 725000 China

Abstract：The author extends the Marcinkiewicz type theorem in the condition of independent identically distributed random variables to the exchangeable random variables，and obtains a strong law of large numbers about weighted sum of exchangeable random variables.

Key words：exchangeability；weighted sum；law of large numbers

责任编辑　张　栒