文章编号:1000-5471(2011)02-0017-03

非线性反应-扩散方程的精确解①

邱美兰[1,2]，　李德旺[1]，　林远华[1]

1. 河池学院 数学系，广西 宜州 546300；2. 云南民族大学 数学与计算机科学学院，昆明 650031

摘要：将求非线性演化方程精确解的新方法进行了推广，通过引入一个变换和选准试探函数的方法，求出了非线性反应-扩散方程的一些精确解.

关　键　词：非线性反应-扩散方程；精确解；变换-试探函数法

中图分类号：O175.29　　**文献标志码：**A

反应扩散方程作为一类重要的抛物型方程[1]，来源于自然界中广泛存在的扩散现象. 本文推广了求非线性演化方程精确解的新方法[2-3]并采用变换-试探函数法[4-6]求解数学物理学中非常重要的非线性偏微分方程 —— 非线性反应-扩散方程的一些精确解.

所研究的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta u+\gamma u^3=0 \tag{1}$$

其中：α,β,γ 为任意常数. 为求解方程(1)，引入一个新的变换

$$u=u_0+\frac{\partial v}{\partial x}\qquad v=v(w)\qquad w=w(x,\ t) \tag{2}$$

其中：u_0 为待定常数，$v(w)$ 和 $w(x,\ t)$ 为试探函数.

适当的函数 $v(w)$ 和 $w(x,\ t)$ 可将非线性反应-扩散方程(1)化为一组更易于求解的非线性代数方程组，从而使整个求解过程的难度大大降低. 由于非线性反应-扩散方程是非线性动力学理论推导出来的方程，根据弹性动力学知识[7]可知，其解应含有因子 $k(x-ct)$，故选择试探函数 $w(x,\ t)$ 为

$$w=\mathrm{e}^{k\xi} \tag{3}$$

其中：$\xi=x-ct$，k 为波数，c 为波速.

设另一个试探函数为

$$v=a\ln(b+w^2) \tag{4}$$

其中 a,b 为待定常数.

由(2)-(4)式可得：

$$u=u_0+\frac{\partial v}{\partial x}=u_0+\frac{2akw^2}{b+w^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-4abk^2cw^2}{(b+w^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{8ab^2k^3c^2w^2-8abk^3c^2w^4}{(b+w^2)^3} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4abk^2w^2}{(b+w^2)^2}$$

① 收稿日期：2009-12-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10861014)；河池学院应用数学重点学科(200725).
作者简介：邱美兰(1981-)，女，江西信丰人，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究.
通讯作者：李德旺.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{8ab^2k^3w^2 - 8abk^3w^4}{(b+w^2)^3} \tag{7}$$

把(5),(6),(7) 式代入方程(1),借助于计算软件 Mathematica[8],可以得到关于 w 的多项式,再令各 $w^j (j = 1,2,\cdots\cdots)$ 的系数为 0,得到下面一组关于待定常数 a,b,u_0 的非线性代数方程组:

$$\begin{cases} b^3\beta u_0 + b^3\gamma u_0{}^3 = 0 \\ 8ab^2k^3c^2 + 8ab^2k^3\alpha + 3b^2\beta u_0 + 2ab^2k\beta + 3b^2\gamma u_0{}^3 + 6ab^2k\gamma u_0{}^2 = 0 \\ 12a^2bk^2\gamma u_0 + 12abk\gamma u_0{}^2 + 3b\gamma u_0{}^3 + 4abk\beta + 3b\beta u_0 - 8abk^3\alpha - 8abk^3c^2 = 0 \\ \gamma u_0{}^3 + 6ak\gamma u_0{}^2 + \beta u_0 + 2ak\beta + 12a^2k^2\gamma u_0 + 8a^3k^3\gamma = 0 \end{cases}$$

解上述非线性代数方程组得

$$a = \pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}} \qquad u_0 = -ak = \mp\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}} \tag{8}$$

其中 b,c,k 为任意常数.把(8) 式代入(5) 式,并结合(3) 式可得到

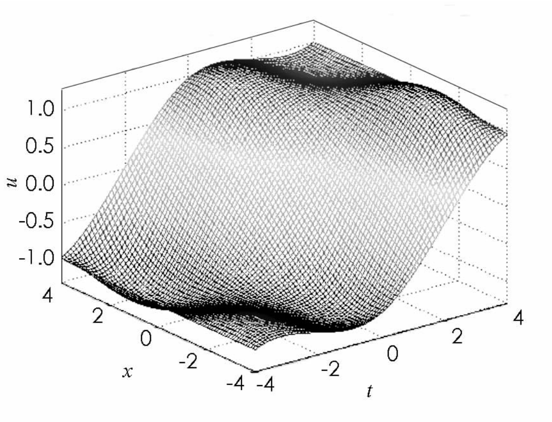
$$u = \frac{\pm 2\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}e^{2k\xi}}{b + e^{2k\xi}} \mp \sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}} \tag{9}$$

此指数函数解是非线性反应-扩散方程(1) 的一般行波解,因为 b 是任意常数,所以 b 可取不同的值.根据该式可得到方程(1) 的多个有实际意义的特解如下:

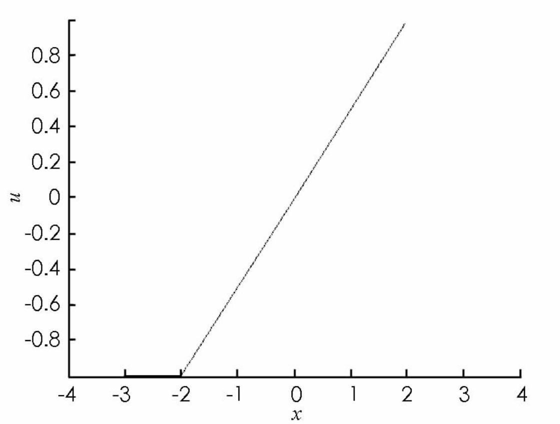
取 $b = 1$,结合初等数学等式 $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{2}(1 + \tanh\frac{x}{2})$,由(9) 式得到

$$u = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\tanh k\xi \tag{10}$$

此即反应-扩散方程(1) 的扭状正则孤波解.令 $\beta = -1$,$\gamma = 1$,$k = 1$,$c = -0.5$,则反应-扩散方程(1) 的扭状解图如图 1 所示.



(a) 空间图



(b) 平面图

图 1　反应-扩散方程(1) 的扭状解图

取 $b = -1$,结合等式 $\frac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{2}(1 + \coth\frac{x}{2})$,由(9) 式得到

$$u = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\coth k\xi \tag{11}$$

上式是方程(1) 的奇异行波解.

令 $k = \mathrm{i}k'$,式中 i 为虚数单位,k' 为常数,还可将 k' 视为 k,由双曲函数与三角函数之间的关系 $\tanh(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\tanh(x)$,$\coth(\mathrm{i}x) = -\mathrm{i}x$ 可把(10) 和(11) 式分别化成

$$u = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\tan k\xi \tag{12}$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cot k\xi \tag{13}$$

上面两式分别是非线性反应-扩散方程(1) 的正切和余切函数型的三角函数周期波解.

以上是反应-扩散方程(1)的几个基本解，再结合下面一些已知关系，可以得到反应-扩散方程(1)的许多其它类型的解：结合等式 $\tanh x=\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x+1}$，可把(10)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\frac{\sinh 2k\xi}{\cosh 2k\xi+1}$；结合等式 $\tanh x=\frac{\cosh 2x-1}{\sinh 2x}$，可把(10)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\frac{\cosh 2k\xi-1}{\sinh 2k\xi}$；结合等式 $\coth x=\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x-1}$，可把(11)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\frac{\sinh 2k\xi}{\cosh 2k\xi-1}$；结合等式 $\coth x=\frac{\cosh 2x+1}{\sinh 2x}$，可把(11)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\frac{\cosh 2k\xi+1}{\sinh 2k\xi}$；结合等式 $\tan x=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$，可把(12)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{\sin 2k\xi}{1+\cos 2k\xi}$；结合等式 $\tan x=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$，可把(12)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{1-\cos 2k\xi}{\sin 2k\xi}$；结合等式 $\cot x=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$，可把(13)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{\sin 2k\xi}{1-\cos 2k\xi}$；结合等式 $\cot x=\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$，可把(13)式化成 $u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{1+\cos 2k\xi}{\sin 2k\xi}$.

根据文献[4，9]可知：如果非线性反应-扩散方程(1)有 tanh-型解 $u(x,t)=p(\tanh k\xi)$，那么也有 tanh-sech-型解 $u(x,t)=p(\tanh 2k\xi\pm \mathrm{i}\,\mathrm{sech}\,2k\xi)$；若方程(1)有 coth-型解 $u(x,t)=p(\coth k\xi)$，则也有 coth-csch-型解 $u(x,t)=p(\coth 2k\xi\pm \mathrm{i}\,\mathrm{csch}\,2k\xi)$；若方程(1)有 tan-型解 $u(x,t)=p(\tan k\xi)$，则它肯定有 tan-sec-型解 $u(x,t)=p(\tan 2k\xi\pm\sec 2k\xi)$；若方程(1)有 cot-型解 $u(x,t)=p(\cot k\xi)$，它必有 cot-csc-型解 $u(x,t)=p(\cot 2k\xi\pm\csc 2k\xi)$. 于是非线性反应-扩散方程(1)还有下面的这些解：

$$u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}(\tanh 2k\xi\pm \mathrm{i}\,\mathrm{sech}\,2k\xi)\qquad u=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}(\coth 2k\xi\pm \mathrm{i}\,\mathrm{csch}\,2k\xi)$$

$$u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(\tan 2k\xi\pm\sec 2k\xi)\qquad u=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}(\cot 2k\xi\pm\csc 2k\xi)$$

参考文献：

[1] MALFLIET W. Solitary Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations [J]. Am J Phys，1992，60(7)：650－654.
[2] 谢元喜，唐驾时. 对“求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法”的一点注记 [J]. 物理学报，2005，54(3)：1036－1038.
[3] 郭柏灵. 非线性演化方程 [M]. 上海：上海教育出版社，1995.
[4] 谢元喜. 非线性偏微分方程的解法研究 [D]. 长沙：湖南大学，2006.
[5] XIE Yuan-xi. New Solutions of the Burgers Equation [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2008，29(5)：5－22.
[6] 谢元喜，唐驾时. 求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法 [J]. 物理学报，2004，53(9)：2828－2830.
[7] 杨桂通，张善元. 弹性动力学 [M]. 北京：中国铁道出版社，1988：332－343.
[8] 李志斌，张善卿. 非线性波方程孤立波解的符号计算 [J]. 数学物理报，1997，17(1)：81－89.
[9] Liu Chun-ping. The Relation between the Kink-type Solution and the Kink-bell-type Solution of Nonlinear Evolution Equations [J]. Chin Phys Lett，2003，312：41－48.

The Exact Solutions of the Nonlinear Reaction-Diffusion Equations

QIU Mei-lan[1,2]，　LI De-wang[1]，　LIN Yuan-hua[1]
1. Department of Mathematics，Hechi University，Yizhou Guangxi 546300，China；
2. Department of Mathematics and Computer Science，Yunnan University of the Nationalities，Kunming 650031，China

Abstract：In this paper，the authors extend a new method for constructing the exact solutions of nonlinear evolution equations. By introducing a new transformation and selecting appropriate trial functions，the authors obtain some exact solutions of the nonlinear reaction-diffusion equations.

Key words：nonlinear reaction-diffusion equation；exact solution；transformation-trial functions

责任编辑　张　枸