文章编号:1000-5471(2011)02-0012-05

解热传导方程的一类新修正差分格式①

程晓亮[1,2], 车明刚[1]

1. 吉林师范大学 数学学院,吉林 四平 136000;2. 首都师范大学 数学科学学院,北京 100037

摘要: 利用 lie 乘积公式对一维热传导方程的初边值问题设计了一类新的数值方法,证明了此类方法中的修正隐方法和修正 C-N 方法是显示的无条件稳定的,且修正显方法的稳定域比经典显方法大.

关 键 词: 修正差分格式;稳定性;Lie 乘积公式

中图分类号: O241 **文献标志码:** A

首先考察一维空间的热传导方程[1],用中心差商代替微商,得到半离散化方程,并求得半离散化方程的解[2]. 根据 Crank-Nicolson 法(C-N 法),借助于 Lie 乘积公式得到解的新的近似,从而给出修正局部 Crank-Nicolson 法[3-4]. 在此基础上可类似推广到高维情形,此种修正局部 Crank-Nicolson 法与 Crank-Nicolson 法相比较是显示差分格式,计算时不需要解以大型矩阵为系数矩阵的线性方程组,从而计算简单,计算量小,在解决实际问题中有广泛的应用价值.

1 关于一维热传导方程解法的描述

考虑一维空间热传导方程[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

其中:$u(x,0)=f(x)$,在 Ω 上;$u(x,t)=0$,在 $\partial\Omega$ 上;$\Omega=(0,1)$,$t\in[0,T]$.

对问题(1),空间的二阶导数用中心差商代替,得到半离散化方程[2]:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{h^2}\mathbf{A}\mathbf{V}(t) \tag{2}$$

其中:$\mathbf{V}(t)=(v(x_1,t),\cdots,v(x_n,t))^T$,$x_i=ih$,$h=\Delta x=\dfrac{1}{n+1}$,$\Delta t=k$,$r=\dfrac{k}{h^2}$,$v(x_i,t)$ 是 $u(x_i,t)$ 的近似解,并且 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶三对角矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2\end{bmatrix}$$

带有初始向量 $\mathbf{V}(0)=(v(x_1,0),\cdots,v(x_n,0))^T$ 的解可表示为:

$$\mathbf{V}(t)=\exp\left(\frac{t}{h^2}\mathbf{A}\right)\mathbf{V}(0) \tag{3}$$

古典显格式、隐格式和 Crank-Nicolson 格式(C-N 格式)[2,5] 可以表示为:

① 收稿日期:2009-10-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10971084).
作者简介:程晓亮(1980-),男,吉林长岭人,讲师,主要从事偏微分方程数值解与复几何分析研究.
通信作者:车明刚,讲师.

$$\boldsymbol{V}(t_m)=(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A})^m\boldsymbol{V}(0) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{V}(t_m)=[(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A})^{-1}]^m\boldsymbol{V}(0) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{V}(t_m)=\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}\right)\right]^m\boldsymbol{V}(0) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{V}(t_m)=(v(x_1,t_m),\cdots,v(x_n,t_m))^T \qquad t_m=mk,\ m=1,2,\cdots,M$$

由(4)到(6)式可以得到如下近似式：

$$\exp\left(\frac{t_m}{h^2}\right)\approx(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A})^m \tag{7}$$

$$\exp\left(\frac{t_m}{h^2}\right)\approx[(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A})^{-1}]^m \tag{8}$$

$$\exp\left(\frac{t_m}{h^2}\right)\approx\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}\right)\right]^m \tag{9}$$

根据泛函分析[3] 中 Lie 乘积公式 $\exp(A+B)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\times\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n$，先把矩阵 A 如下分裂：

$$\boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}-1&1&0&\cdots&0\\1&-1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\cdots,$$

$$\boldsymbol{B}_k=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&\cdots&-1&1&\cdots&0\\0&\cdots&1&-1&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{B}_n=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&-1\end{bmatrix}$$

其中 $k=2,\cdots,n-1$. 再令

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}_0 \qquad \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_{n-1} \qquad \boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_{n-2} \qquad \cdots$$

当 n 为奇数时，$\boldsymbol{A}_{(n+1)/2}=\boldsymbol{B}_{(n-1)/2}+\boldsymbol{B}_{(n+1)/2}$，$\boldsymbol{A}_{(\frac{n+1}{2}+1)}=\boldsymbol{B}_n$；当 n 为偶数时，$\boldsymbol{A}_{n/2}=\boldsymbol{B}_{n/2}$，$\boldsymbol{A}_{(\frac{n}{2}+1)}=\boldsymbol{B}_n$.

为叙述方便且不引起混淆，把奇数和偶数情形统一记为 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 可以得到新的修正差分格式.

修正古典显格式：

$$\boldsymbol{V}_1(t_{m+1})=\prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{V}_1(t_m) \tag{10}$$

修正古典隐格式：

$$\boldsymbol{V}_1(t_{m+1})=\prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_i)^{-1}\boldsymbol{V}_1(t_m) \tag{11}$$

修正 C-N 格式：

$$\boldsymbol{V}_1(t_{m+1})=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)\right]\boldsymbol{V}_1(t_m) \tag{12}$$

为提高精度，令 $\boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{A}_{n+1-i}$，$\boldsymbol{V}_2(t_{m+1})=\prod\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{V}_2(t_m)$(修正古典显格式)，$\boldsymbol{V}_2(t_{m+1})=\prod\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{C}_i)^{-1}\boldsymbol{V}_2(t_m)$(修正古典隐格式)，$\boldsymbol{V}_2(t_{m+1})=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{C}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{C}_i\right)\right]\boldsymbol{V}_2(t_m)$(C-N 格式).

得到统一形式修正格式：

$$\boldsymbol{V}(t_{m+1}) = (\boldsymbol{V}_1(t_m) + \boldsymbol{V}_2(t_m))/2 \tag{13}$$

2 关于稳定性和收敛性的结论

定理 1 分裂后 $\boldsymbol{A}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的特征值均小于等于0，且不计重数特征值或为-3，或为-2，或为-1，或为0.

证 事实上 A_i 的特征值为：

1) 当 $i=2, \cdots, n-2$ 时，$\lambda=0(n-2$ 重根$)$，$\lambda=-2$(二重根)；

2) 当 $i=1, n$ 时，$\lambda=0(n-1$ 重根$)$，$\lambda=-1$(单根)；

3) 当 $i=n-1$，n 为奇数时，$\lambda=0(n-2$ 重根$)$，$\lambda=-1$(单根)，$\lambda=-3$(单根)；

4) 当 $i=n-1$，n 为偶数时，$\lambda=0(n-1$ 重根$)$，$\lambda=-2$(单根).

定理 2 对任意 $r \geqslant 0$，矩阵$(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A}_i)$，$(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_i)^{-1}$，$\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)\right](i=1, 2, \cdots, n)$ 的特征值均小于等于1.

证 事实上根据定理1可得$(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A}_i)$ 的特征值为：

1) 当 $i=2,\cdots,n-2$ 时，$\lambda=1(n-2$ 重根$)$，$\lambda=1-2r$(二重根)；

2) 当 $i=1,n$ 时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=1-r$(单根)；

3) 当 $i=n-1$，n 为奇数时，$\lambda=1(n-2$ 重根$)$，$\lambda=1-r$(单根)，$\lambda=1-3r$(单根)；

4) 当 $i=n-1$，n 为偶数时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=1-2r$(单根).

$(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_i)^{-1}$ 的特征值为：

1) 当 $i=2,\cdots,n-2$ 时，$\lambda=1(n-2$ 重根$)$，$\lambda=(1+2r)^{-1}$(二重根)；

2) 当 $i=1,n$ 时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=(1+r)^{-1}$(单根)；

3) 当 $i=n-1$，n 为奇数时，$\lambda=1(n-2$ 重根$)$，$\lambda=(1+r)^{-1}$(单根)，$\lambda=(1+3r)^{-1}$(单根)；

4) 当 $i=n-1$，n 为偶数时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=(1+2r)^{-1}$(单根).

$\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)$的特征值为：

1) 当 $i=2,\cdots,n-2$ 时，$\lambda=1(n-2$ 重根$)$，$\lambda=(1+r)^{-1}(1-r)$(二重根)；

2) 当 $i=1,n$ 时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=\left(1+\frac{1}{2}r\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{2}r\right)$(单根)；

3) 当 $i=n-1$，n 为奇数时，$\lambda=\left(1+\frac{3}{2}r\right)^{-1}\left(1-\frac{3}{2}r\right)$(单根)；

4) 当 $i=n-1$，n 为偶数时，$\lambda=1(n-1$ 重根$)$，$\lambda=(1+r)^{-1}(1-r)$(单根).

定理 3 对任意 $r \geqslant 0$，修正古典显格式中$(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的谱半径小于等于1的充分必要条件是：当 n 为偶数时，$r \leqslant 1$；当 n 为奇数时，$r \leqslant \frac{2}{3}$.

证 对任意 $r \geqslant 0$，$(\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{A}_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的谱半径小于等于1，当且仅当

1) n 为奇数时，$\begin{cases} |1-2r| \leqslant 1 \\ |1-r| \leqslant 1 \\ |1-3r| \leqslant 1 \end{cases}$，则有$\begin{cases} -1 \leqslant 1-2r \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 1-r \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 1-3r \leqslant 1 \end{cases}$，因为 $r \geqslant 0$，所以有$\begin{cases} r \leqslant 1 \\ r \leqslant 2 \\ r \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$，即 $r \leqslant \frac{2}{3}$；

2) n 为偶数时，$\begin{cases} |1-2r| \leqslant 1 \\ |1-r| \leqslant 1 \end{cases}$，则有$\begin{cases} -1 \leqslant 1-2r \leqslant 1 \\ -1 \leqslant 1-r \leqslant 1 \end{cases}$，因为 $r \geqslant 0$，所以有$\begin{cases} r \leqslant 1 \\ r \leqslant 2 \end{cases}$，即 $r \leqslant 1$；

从而结论得证.

定理 4 对于任意 $r \geqslant 0$，修正隐格式中$(\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{A}_i)^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 的谱半径小于等于1.

证 由定理2，显然得到.

定理 5 对于任意 $r \geqslant 0$，修正C-N格式中$\left[\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)\right](i=1,2,\cdots,n)$ 的谱半径小于

等于 1.

证　由定理 2，显然得到.

定理 6　对于任意的 $r \geqslant 0$，$(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{A}_i)^{-1}$ 和 $\left[\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}r\boldsymbol{A}_i\right)\right](i = 1, 2, \cdots, n)$ 的 2 范数不超过 1. 而 $(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{A}_i)$ 的 2 范数不超过 1 当且仅当 $r \leqslant 1$(n 为偶数)，$r \leqslant \frac{2}{3}$(n 为奇数).

证　由定理 3、定理 4、定理 5 容易证明.

定理 7　按上述分裂办法修正隐格式和修正 C-N 格式都是无条件稳定格式. 而修正显格式稳定的充分必要条件是 $r \leqslant 1$(n 为偶数)，$r \leqslant \frac{2}{3}$(n 为奇数).

证　根据范数的相容性，对于修正隐格式 $\left\| \prod_{i=1}^{n}(I - rA_i)^{-1} \right\|_2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left\| (I - rA_i)^{-1} \right\|_2 \leqslant 1$. 对于修正 C-N 格式与修正显格式同理可证，即得定理结论.

最后，由相容性和 Lax 等价定理易得格式(13) 在上述相应条件下是收敛的.

3　算法实现及优越性

从分裂过程可以看到 $\boldsymbol{A}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是如下形式矩阵：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{A}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{O} & & \vdots \\ & & & \boldsymbol{H} & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{H} & \\ \vdots & & & \boldsymbol{O} & \vdots \\ & & & & \ddots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时，} \boldsymbol{A}_{n-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & \boldsymbol{O} & & & \vdots \\ & & \boldsymbol{O} & & \\ \vdots & & \boldsymbol{J} & & \vdots \\ & & & \boldsymbol{O} & \\ \vdots & & & \boldsymbol{O} & \vdots \\ & & & & \ddots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时，} \boldsymbol{A}_{n-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & \boldsymbol{O} & & & \vdots \\ & & \boldsymbol{O} & & \\ \vdots & & \boldsymbol{H} & & \vdots \\ & & & \boldsymbol{O} & \\ \vdots & & & \boldsymbol{O} & \vdots \\ & & & & \ddots \\ \boldsymbol{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}
$$

其中：$k = 2, \cdots, n-2$；$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{O}$是相应零子块.

1）对修正古典显格式：计算$\boldsymbol{V}_1(t_{m+1}) = \prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I} + r\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{V}_1(t_m)$时，把列向量$\boldsymbol{V}_1(t_m)$作相应分块，每次矩阵与向量做乘法计算，只要将2个二阶子块与相应块相乘，或者1个三阶子块与相应子块相乘.

2）对修正隐格式：计算$\boldsymbol{V}_1(t_{m+1}) = \prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{A}_i)^{-1}\boldsymbol{V}_1(t_m)$，每次矩阵与向量乘法，只要求解方程$(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{A}_i)x = \boldsymbol{V}_1(t_m)$中的2个二阶子方程或1个三阶子方程.

3）对于修正C-N格式：相应地只要先如修正显格式计算，再如修正隐格式计算即可.

如上，当求解点数无限增多时，此类修正算法易在计算机上实现，且易推广到高维情形.

参考文献：

[1] EVENS L C. Partial Differential Equations [M]. Providence: ACM Press, 1998: 64－85.
[2] 阿不都热西提·阿不都外力. 修正局部Crank-Nicolson法对于二维热传导方程的应用 [J]. 计算数学, 1997(3): 267－276.
[3] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义(下册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1990: 69－88.
[4] MORTON K M, MAYERS D F. Numerical Solution of Partial Differential Equation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 135－153.
[5] Yang Hui, Peng Xing. The Two Patterns of High Exact Difference in Convection Equation [J]. 数学季刊, 2003, 18(3): 328－330.
[6] 程晓亮, 刘 露, 黄 铎. 关于修正局部Crank-Nicolson法对于二维热传导方程的应用的注记 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 2008, 29(5): 7－9.
[7] 黄 铎, 陈兰平, 王 风. 数值分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 45－80.

A Classical Corrector New Difference Method for the One-Dimensional Heat Equation

CHENG Xiao-liang[1,2], CHE Ming-gang[1]
1. College of Maths, Jilin Normal University, Jilin Siping 136000, China;
2. College of Maths, Capital Normal University, Beijing 100037, China

Abstract: This paper described that a classical new numerical method for solving initial-boundary problems of the one-dimensional heat equation on Lie product. We proved that these methods is explicit, unconditionally stable for corrector implicit method and corrector C-N method. The stability domain of the corrector explicit method is more larger than the classical explicit method.

Key words: corrector method; stability; Lie product formulate

责任编辑 张 枸