第 36 卷　第 2 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2011 年 4 月
Vol. 36　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr.　2011

文章编号：1000-5471(2011)02-0006-06

一类无穷时间区间 BSDEs 的 L^p 解[①]

宋　丽

1. 山东轻工业学院 金融职业学院，济南 250100；2. 山东大学 数学院，济南 250100

摘要： 考虑一类无穷时间区间的倒向随机微分方程，证明了方程 L^p 解的存在唯一性（$1<p\leqslant 2$），并且还得到了此类方程 L^p 解的收敛定理.

关　键　词： 倒向随机微分方程；L^p 解；无穷时间区间；收敛定理

中图分类号： O211.63　　**文献标志码：** A

文献[1]提出了如下形式的倒向随机微分方程(BSDE)

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$

在生成元 g 关于变量 y 与 z 是 Lipschitz 的，终端条件 ξ 和 $(g(t,0,0))_{t\in[0,T]}$ 是平方可积的条件下，证明了此类非线性倒向随机微分方程存在唯一一对适应的平方可积解 $(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}$. 从此，大量研究者致力于研究在各种不同条件下，倒向随机微分方程解的存在性. 文献[2-3]研究了方程(1)在终端条件为停时或无穷时的解；文献[4]得到了当生成元 g 一致 Lipschitz 连续，ξ 和 $(g(t,0,0))_{t\in[0,T]}$ 在 $L^p(p>1)$ 空间中时，倒向随机微分方程(1)解的存在唯一性；文献[5]讨论了随机 Lipschitz 条件的情形；文献[6]讨论了具有多项式增长生成元的倒向随机微分方程的 L^p 解，随后文献[7]又扩展了此结果.

本文将研究当 $T=+\infty$ 时，倒向随机微分方程(1)是否具有唯一的 L^p 解.

1　预备知识

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间，$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是该空间上的一个 d-维标准 Brown 运动且 $B_0=0$. 设 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是由此 Brown 运动产生的 σ 域流，即 $\mathscr{F}_t=\sigma\{B_s,0\leqslant s\leqslant t\}$. 记 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_\infty=\sigma\{\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t\}$.

对 $1<p\leqslant 2$，定义如下过程空间：

$\mathscr{S}^p=\{Y:Y$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$-适应过程，范数为 $\|Y\|_{\mathscr{S}^p}:=(E[(\sup\limits_{t\geqslant 0}|Y_t|)^p])^{\frac{1}{p}}<+\infty\}$

$\mathscr{M}^p=\{Z:Z$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$-适应过程，范数为 $\|Z\|_{\mathscr{M}^p}:=(E[(\int_0^{+\infty}|Z_t|^2dt)^{\frac{p}{2}}])^{\frac{1}{p}}<+\infty\}$

$L^p(\Omega,\mathscr{F}_t,P)=\{\xi:\xi$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$-可测随机变量，满足 $E[|\xi|^p]<+\infty\}$，$0\leqslant t\leqslant+\infty$

显然，$\mathscr{B}^p:=\{(Y,Z):Y\in\mathscr{S}^p,Z\in\mathscr{M}^p\}$ 是一个具有 $\|(Y,Z)\|_{\mathscr{B}^p}:=(\|Y\|^p_{\mathscr{S}^p}+\|Z\|^p_{\mathscr{M}^p})^{\frac{1}{p}}$ 范数的 Banach 空间.

本文考虑如下具有无穷时间区间形式的倒向随机微分方程

---

① 收稿日期：2009-12-29
基金项目：国家重点基础研究发展计划资助(2007CB814901).
作者简介：宋　丽(1979-)，女，四川新津人，讲师，博士研究生，主要从事金融数学与金融工程的研究.

$$Y_t=\xi+\int_t^{+\infty}g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}Z_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty \tag{2}$$

生成元 g 是这样一个函数 $g(\omega,t,y,z)$：$\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，对任意 $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$，$(g(t,y,z))_{t\geqslant 0}$ 是循序可测过程，且满足如下假设：

(A1) $\forall(y,z)\in\mathscr{B}^p$，有 $E[(\int_0^{+\infty}|g(t,y,z)|\mathrm{d}t)^p]<+\infty$；

(A2) 存在 2 个正的确定函数 $v(t)$ 和 $u(t)$，满足：$\forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$，$z_1,z_2\in\mathbb{R}^d$，$t\in\mathbb{R}_+$：$|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)|\leqslant v(t)|y_1-y_2|+u(t)|z_1-z_2|$；

(A3) Lipschitzian 函数 $v(t)$ 和 $u(t)$ 满足：$\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t<+\infty$，$\int_0^{+\infty}u^2(t)\mathrm{d}t<+\infty$.

本文主要讨论当终端值 $\xi\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$ 时，倒向随机微分方程(2)的 L^p 解. 首先给出关于解的先验估计.

引理　假设 g 满足(A1)－(A3). 对任意 $T\in[0,+\infty]$，令 $Y_T^i\in L^p(\Omega,\mathscr{F}_T,P)$，$(Y^i,Z^i)$ 和 $(y^i,z^i)\in\mathscr{B}^p$ 满足如下方程

$$Y_t^i=Y_T^i+\int_t^T g(s,y_s^i,z_s^i)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s^i\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty,\ i=1,2$$

则对任意 $r\in[0,T]$，有

$$\|((Y^1-Y^2)1_{[r,T]},(Z^1-Z^2)1_{[r,T]})\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant$$
$$C_p(\mathrm{E}[|Y_T^1-Y_T^2|^p]+l(r,T)\|((y^1-y^2)1_{[r,T]},(z^1-z^2)1_{[r,T]})\|_{\mathscr{B}^p}^p$$

其中：C_p 是一个仅依赖于 p 的常数，$1_{[r,T]}(\cdot)$ 是区间 $[r,T]$ 上的示性函数，$l(r,T):=(\int_r^T v(s)\mathrm{d}s)^p+(\int_r^T u^2(s)\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}$.

证　不失一般性，首先证明 $r=0$，$T=\infty$ 的情形. 令 $\hat{Y}=Y^1-Y^2$，$\hat{Z}=Z^1-Z^2$，$\hat{y}=y^1-y^2$，$\hat{z}=z^1-z^2$，$\hat{g}(s)=g(s,y_s^1,z_s^1)-g(s,y_s^2,z_s^2)$，则 $(\hat{Y},\hat{Z})$ 是下列倒向随机微分方程的解

$$\hat{Y}_t=\hat{Y}_T+\int_t^{+\infty}\hat{g}(s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}\hat{Z}_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty$$

显然有 $(\hat{Y},\hat{Z})\in\mathscr{B}^p$，$\hat{Y}_t=E[\hat{Y}_T+\int_t^{+\infty}\hat{g}(s)\mathrm{d}s\mid\mathscr{F}_t]$. 由 Doob 不等式得到

$$\begin{aligned}\|\hat{Y}\|_{\mathscr{S}^p}^p=&\mathrm{E}[(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^p]=E[(\sup_{t\geqslant 0}|E[\hat{Y}_T+\int_t^{+\infty}\hat{g}(s)\mathrm{d}s\mid\mathscr{F}_t]|)^p]\leqslant\\&E[(\sup_{t\geqslant 0}E[|\hat{Y}_T|+\int_t^{+\infty}|\hat{g}(s)|\mathrm{d}s\mid\mathscr{F}_t])^p]\leqslant\\&\left(\frac{p}{p-1}\right)^pE[(E[|\hat{Y}_T|+\int_0^{+\infty}|\hat{g}(s)|\mathrm{d}s\mid\mathscr{F}_t])^p]=\\&\left(\frac{p}{p-1}\right)^pE[(|\hat{Y}_T|+\int_0^{+\infty}|\hat{g}(s)|\mathrm{d}s)^p]\leqslant\\&2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p(E[|\hat{Y}_T|^p]+E[(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(s)|\mathrm{d}s)^p])\end{aligned}\tag{3}$$

由 Itô 公式和不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$ 得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t\leqslant&|\hat{Y}_T|^2+2\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t+2|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|\leqslant\\&(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^2+(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^2+(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^2+2|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|\leqslant\\&2((\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^2+(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^2+|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|)\end{aligned}$$

$$E[(\int_0^{+\infty}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]\leqslant 2^{\frac{p}{2}}E[((\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^2+(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^2+|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|)^{\frac{p}{2}}]\leqslant$$
$$4\cdot 2^{\frac{p}{2}}\mathrm{E}[(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^p+(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^p+|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|^{\frac{p}{2}}] \tag{4}$$

由 BDG 不等式和 $ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 得

$$4\cdot 2^{\frac{p}{2}}E[|\int_0^{+\infty}\hat{Y}_t\cdot\hat{Z}_t\mathrm{d}B_t|^{\frac{p}{2}}]\leqslant 4\cdot 2^{\frac{p}{2}}d_pE[(\int_0^{+\infty}|\hat{Y}_t|^2|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{4}}]\leqslant$$
$$4\cdot 2^{\frac{p}{2}}d_pE[(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^{\frac{p}{2}}(\int_0^{+\infty}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{4}}]\leqslant \tag{5}$$
$$8\cdot 2^pd_p^2E[(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^p]+\frac{1}{2}\mathrm{E}[(\int_0^{+\infty}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]$$

由式(4) 和式(5),可知

$$\|\hat{Z}\|_{\mathscr{M}^p}^p=E[(\int_0^{+\infty}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]\leqslant e_p\Big(E(\sup_{t\geqslant 0}|\hat{Y}_t|)^p+E(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^p\Big) \tag{6}$$

根据假设(A2) 和 Hölder 不等式得

$$\mathrm{E}(\int_0^{+\infty}|\hat{g}(t)|\mathrm{d}t)^p\leqslant E(\int_0^{+\infty}(v(t)|\hat{y}_t|+u(t)|\hat{z}_t|)\mathrm{d}t)^p\leqslant$$
$$2E[\int_0^{+\infty}v(t)|\hat{y}_t|\mathrm{d}t]^p+2E[\int_0^{+\infty}u(t)|\hat{z}_t|\mathrm{d}t]^p\leqslant$$
$$2E[\sup_{t\geqslant 0}|\hat{y}_t|\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t]^p+2E[(\int_0^{+\infty}u^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}(\int_0^{+\infty}|\hat{z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]=$$
$$2\|\hat{y}\|_{\mathscr{S}^p}^p(\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t)^p+2\|\hat{z}\|_{\mathscr{M}^p}^p(\int_0^{+\infty}u^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}\leqslant \tag{7}$$
$$2[(\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t)^p+(\int_0^{+\infty}u^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}](\|\hat{y}\|_{\mathscr{S}^p}^p+\|\hat{z}\|_{\mathscr{M}^p}^p)=$$
$$2l(0,+\infty)\|(\hat{y},\hat{z})\|_{\mathscr{B}^p}^p$$

根据式(3),(6) 和(7),从而有

$$\|\hat{y}\|_{\mathscr{S}^p}^p+\|\hat{Z}\|_{\mathscr{M}^p}^p=\|(\hat{Y},\hat{Z})\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant C_p(E|\hat{Y}_T|^p+l(0,+\infty)\|(\hat{y},\hat{z})\|_{\mathscr{B}^p}^p)$$

其中 C_p 是一个仅依赖于 p 的常数.

对 $0\leqslant r\leqslant T\leqslant+\infty$ 的情形,只需令函数 $g_1(t,y,z)=g(t,y,z)1_{[r,T]}(t)$,重复上述过程,即可证明引理.

2 主要结论

定理 1 给定 $\xi\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$,假设 g 满足(A1)-(A3),则倒向随机微分方程(2) 有唯一解 $(Y,Z)\in\mathscr{B}^p$.

证 证明过程分为两步. 首先假设 $l(0,+\infty):=(\int_0^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s)^p+(\int_0^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}<\dfrac{1}{C_p}$,其中 C_p 是上述引理中的常数. 对任意给定的 $(y,z)\in\mathscr{B}^p$,考虑如下倒向随机微分方程

$$Y_t=\xi+\int_t^{+\infty}g(s,y_s,z_s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}Z_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty \tag{8}$$

记 $\hat{g}(s,\omega)=g(s,y_s,z_z)$,方程(8) 改写为

$$Y_t=\xi+\int_t^{+\infty}\hat{g}(s,\omega)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}Z_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty \tag{9}$$

由文献[7] 中的定理 5.2,得到倒向随机微分方程(9) 有唯一解 $(Y,Z)\in\mathscr{B}^p$. 作 $\mathscr{B}^p$ 到自身的映射如下:

$$\Phi:(y,z)\to(Y,Z)$$

其中(Y,Z)是倒向随机微分方程(8)的解．此映射是一个压缩映射．事实上，令(y^1,z^1)，$(y^2,z^2)\in\mathscr{B}^p$，则$(Y^1,Z^1)$，$(Y^2,Z^2)$是相应的解．利用引理，有

$$\|(Y^1-Y^2,Z^1-Z^2)\|_{\mathscr{B}^p}^p=\|\Phi(y^1,z^1)-\Phi(y^2,z^2)\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant C_p l(0,+\infty)\|(y^1-y^2,z^1-z^2)\|_{\mathscr{B}^p}^p$$

又因为$l(0,+\infty)<\dfrac{1}{C_p}$，所以$\Phi$是一个从$\mathscr{B}^p$到自身的压缩映射．由压缩映射的不动点原理知，此不动点即为倒向随机微分方程(2)的唯一解．

下面考虑$l(0,+\infty)\geqslant\dfrac{1}{C_p}$的情形．由于$\int_0^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s<+\infty$，$\int_0^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s<+\infty$，因此一定存在一个足够大的常数$T$使得$l(T,+\infty)<\dfrac{1}{C_p}$，即

$$\left(\int_T^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s\right)^p+\left(\int_T^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}<\frac{1}{C_p}$$

令函数$g_1(t,y,z)=1_{[T,+\infty]}(t)g(t,y,z)$，显然$g_1$满足假设条件(A1)－(A3)且 Lipschitzian 函数$v_1(t)=1_{[T,\infty]}(t)v(t)$，$u_2(t)=1_{[T,+\infty]}(t)u(t)$，符合第一步证明中的假设：

$$\left(\int_0^{+\infty}v_1(s)\mathrm{d}s\right)^p+\left(\int_0^{+\infty}{u_1}^2(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}<\frac{1}{C_p}$$

从而存在唯一的$(\hat{Y},\hat{Z})\in\mathscr{B}^p$满足方程

$$\hat{Y}_t=\xi+\int_t^{+\infty}g(s,\hat{Y}_s,\hat{Z}_s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}\hat{Z}_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant+\infty$$

对上述给定的$(\hat{Y},\hat{Z})$，考虑方程

$$\bar{Y}_t=\int_t^T g(s,\bar{Y}_s+\hat{Y}_s,\bar{Z}_s+\hat{Z}_s)\mathrm{d}s-\int_t^T\bar{Z}_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant T$$

由文献[7]中的定理4.2知，此方程在区间$[0,T]$上存在唯一的解$(\bar{Y},\bar{Z})$．因此如下形式的无穷时间区间倒向随机微分方程具有唯一的解

$$\bar{Y}_t=\int_t^T g_1(s,\bar{Y}_s+\hat{Y}_s,\bar{Z}_s+\hat{Z}_s)\mathrm{d}s-\int_t^T\bar{Z}_s\mathrm{d}B_s,\ 0\leqslant t\leqslant T$$

$$\bar{Y}_t\equiv 0,\ \bar{Z}_t\equiv 0,\ t>T$$

令$Y=\bar{Y}+\hat{Y}$，$Z=\bar{Z}+\{\hat{Z}\}$，容易验证(Y,Z)满足倒向随机微分方程(2)．

定理2　给定$\xi_i\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$，$i=1,2$．$g$满足假设条件(A1)－(A3)，$(Y^i,Z^i)$是倒向随机微分方程(2)对应终端值$\xi=\xi_i$时的解．则有

$$\|(Y^1-Y^2,Z^1-Z^2)\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant C\mathrm{E}|\xi_1-\xi_2|^p$$

其中C是一个仅依赖于p的常数．

证　令$\hat{Y}=Y^1-Y^2$，$\hat{Z}=Z^1-Z^2$．由于$(\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t)^p+(\int_0^{+\infty}u^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}<+\infty$，则存在一个严格递增的序列$0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=+\infty$，使得

$$a_i=\left(\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}v(t)\mathrm{d}t\right)^p+\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}u^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{\sqrt[p]{C_p}},\ i=0,1,2,\cdots,n$$

其中C_p是引理中的常数．

取$I=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}a_i$，显然有$I<\dfrac{1}{\sqrt[p]{C_p}}$．根据引理，得到

$$\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_i,t_{i+1}]}\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant C_p(E|\hat{Y}_{t_{i+1}}|^p+[(\int_{t_i}^{t_{i+1}}v(t)\mathrm{d}t)^p+(\int_{t_i}^{t_{i+1}}u^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_i,t_{i+1}]}\|_{\mathscr{B}^p}^p)\leqslant$$

$$C_pE|\hat{Y}_{t_{i+1}}|^p+C_pI^p\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_i,t_{i+1}]}\|_{\mathscr{B}^p}^p,\ i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $\hat{Y}_{t_{n+1}}=\xi_1-\xi_2$，因此有 $\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_n,\infty]}\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant\frac{C_p}{1-C_pI^p}E|\xi_1-\xi_2|^p$. 因为 $1-C_pI^p>0$，所以有

$$\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_i,t_{i+1}]}\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant\frac{C_p}{1-C_pI^p}E|\hat{Y}_{t_{i+1}}|^p\leqslant$$

$$\frac{C_p}{1-C_pI^p}\mathrm{E}[(\sup_{t_{i+1}\leqslant t\leqslant t_{i+2}}|\hat{Y}_t|)^p+(\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}}|\hat{Z}_t|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}]=$$

$$\frac{C_p}{1-C_pI^p}\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_{i+1},t_{i+2}]}\|_{\mathscr{B}^p}^p,\ i=0,1,2,\cdots,n-1$$

令 $N=\sqrt[p]{\frac{C_p}{1-C_pI^p}}$，则有 $N>1$. 利用上述不等式可以得到

$$\|(\hat{Y},\hat{Z})\|_{\mathscr{B}^p}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\|(\hat{Y},\hat{Z})1_{[t_i,t_{i+1}]}\|_{\mathscr{B}^p}\leqslant(N+\cdots+N^{n+1})(E|\xi_1-\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\frac{N(1-N^{n+1})}{1-N}(E|\xi_1-\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

因此有 $\|(\hat{Y},\hat{Z})\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant\frac{N(1-N^{n+1})}{1-N}E|\xi_1-\xi_2|^p=CE|\{\xi_1-\xi_2|^p$.

定理 3 给定 $\xi,\xi_n\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$. 假设 g 满足(A1)-(A3)，(Y^n,Z^n) 是下列倒向随机微分方程的解：

$$Y_t^n=\xi_n+\int_t^{+\infty}g(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}Z_s^n\mathrm{d}B_s,\ n=1,2,\cdots \tag{10}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}|\xi_n-\xi|^p=0$，则存在 $(Y,Z)\in\mathscr{B}^p$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(Y^n-Y,Z^n-Z)\|_{\mathscr{B}^p}=0$，且 (Y,Z) 是如下倒向随机微分方程的解：

$$Y_t=\xi+\int_t^{+\infty}g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^{+\infty}Z_s\mathrm{d}B_s \tag{11}$$

证 $\forall m\in\mathbb{N}$，令 (Y^{m+n},Z^{m+n}) 是倒向随机微分方程(10)在终端条件为 ξ_{m+n} 的解. 由定理 2 得

$$\|(Y^{m+n}-Y^n,Z^{m+n}-Z^n)\|_{\mathscr{B}^p}^p\leqslant CE|\xi_{m+n}-\xi_n|^p\leqslant$$

$$2C(E|\xi_{m+n}-\xi|^p+E|\xi_n-\xi|^p)\to0\ (m,n\to+\infty)$$

其中 C 是一个仅依赖于 p 的常数. 因此 (Y^n,Z^n) 是空间 $\mathscr{B}^p$ 中的 Cauchy 列. 由于 $\mathscr{B}^p$ 是一个 Banach 空间，所以存在 $(Y,Z)\in\mathscr{B}^p$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(Y^n-Y,Z^n-Z)\|_{\mathscr{B}^p}=0$.

由假设(A2)和 Cauchy 不等式得

$$E[|\int_0^{+\infty}g(s,Y_s^n,Z_s{}^n)\mathrm{d}s-\int_0^{+\infty}g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s|^p]\leqslant$$

$$E[(\int_0^{+\infty}|g(s,Y_s^n,Z_s{}^n)\mathrm{d}s-g(s,Y_s,Z_s)|\mathrm{d}s)^p]\leqslant$$

$$E[(\int_0^{+\infty}(v(s)|Y_s^n-Y_s|+u(s)|Z_s^n-Z_s|)\mathrm{d}s)^p]\leqslant$$

$$E[\sup_{s\geqslant0}|Y_s^n-Y_s|\int_0^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s+(\int_0^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{+\infty}|Z_s{}^n-Z_s|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}]^p\leqslant$$

$$2(\int_0^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s)^pE(\sup_{s\geqslant0}|Y_s^n-Y_s|)^p+2(\int_0^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}E(\int_0^{+\infty}|Z_s{}^n-Z_s|^2\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}\leqslant$$

$$2\Big((\int_0^{+\infty}v(s)\mathrm{d}s)^p+(\int_0^{+\infty}u^2(s)\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}\Big)\Big(E(\sup_{s\geqslant0}|Y_s^n-Y_s|)^p+E(\int_0^{+\infty}|Z_s{}^n-Z_s|^2\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}\Big)=$$

$$2l(0,+\infty)\|(Y^n-Y,Z^n-Z)\|_{\mathscr{B}^p}^p\to0\ (n\to+\infty)$$

在方程(10)两端同时对 n 取极限，即可得到 (Y,Z) 是方程(11)的解.

参考文献：

[1] PARDOUX E, PENG S. Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation [J]. Systems Control Lett, 1990, 14: 55—61.

[2] PARDOUX E. BSDE's Week Convergence and Homogenization of Semilinear PDE's [C]//Nonlinear Analysis, Differential Equation and Control. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998: 503—549.

[3] CHEN Z, WANG B. Infinite Time Interval BSDEs and the Convergence of g-martingales [J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis(Series A), 2000, 69: 187—211.

[4] EL KAROUI N, PENG S, QUENEZ M C. Backward Stochastic Differential Equations in Finance [J]. Math Finance, 1997, 7(1): 1—71.

[5] WANG J, RAN Q, CHEN Q. L^p Solutions of BSDEs with Stochastic Lipschitz Condition [J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2007, 50: 1—13.

[6] BRIAND P, CARMONA R. BSDEs with Polynomial Growth Generators [J]. J Appl Math Stochastic Anal, 2000, 13(3): 207—238.

[7] BRIAND P, DELYON B, HU Y, et al. L^p Solutions of Backward Stochastic Differential Equations [J]. Stochastic Processes and Their Application, 2003, 108: 109—129.

L^p Solutions of BSDEs with Infinite Time Interval

SONG　Li

1. School of Finance, Shandong Light Industry School, Jinan 250100, China;

2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China

Abstract: In this paper, the author considers a class of backward stochastic differential equations(BSDEs for short) with infinite time interval. The author proves the existence and uniqueness of the L^p solutions with $1<p\leqslant 2$. Furthermore, and obtains the convergence theorem for infinite time interval BSDEs.

Key words: backward stochastic differential equation; L^p solution; infinite time interval; convergence theorem

责任编辑　张　构