文章编号:1000-5471(2011)02-0001-05

一类广义 BBM 方程的紧性与非紧性结构①

李 楠[1], 谢 芝[2]

1. 西南财经大学 经济数学学院,成都 610074;2. 西南石油大学 油气储运系,四川 新都 644000

摘要: 根据数学变换和微分方程降阶方法,研究了一类 Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程,得到了这类方程的紧孤子、孤立子、孤波相似解、周期解和代数行波解,并对各类解的物理结构变化给出了充分条件.

关 键 词: 非线性方程;紧孤子;孤立子;周期解;高阶项

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A

文献[1]提出了如下形式的 BBM 方程

$$u_t + au_x - bu_{xxt} + k(u^2)_x = 0 \tag{1}$$

该方程用于替代 KdV 方程来描述弱长散射波的无方向传播. 与 KdV 方程一样, BBM 方程作为一个非线性散射媒介中描述长波特征的模型,被形式化推导出来描述浅水波的传播. 该方程不仅用来模拟液体中的液面长波,而且用来模拟低温等离子中的磁流体波、非调和晶体中的声波和可压缩流体中的声波. 由于 BBM 有广泛的应用[2-3],因此许多学者加入了该方程的研究[4-6].

近年来,使用 tanh 方法和 sine-cosine 方法,文献[4]获得了 BBM 方程(1)具不同物理结构的行波解及其如下推广形式方程的各种行波解

$$u_t + au_x - bu_{xxt} + k(u^m)_x = 0,\ m > 1 \text{ 或 } m < -1 \tag{2}$$

这里 a, b 和 k 是非零常数. 文献[4]得到了方程(2)的紧性解、孤立子解、孤波相似解和周期解.

为拓展文献[4]中的工作,研究方程(1)和(2)的如下推广形式(称 GBBM(m, n) 方程):

$$u_t + au_x - b(u^n)_{xxt} + k(u^m)_x = 0 \tag{3}$$

这里 a,b,k,m,n 是非零常数. 若 $n=1$,方程(3)变成方程(2);若 $m=2$, $n=1$,方程(3)变成标准的 BBM 方程(1).

本文使用数学变换和微分方程降阶法的数学技巧来研究方程(3)的 5 种不同形式,即 GBBM(m, 1), GBBM(1, n), GBBM($2-n$, n), GBBM($\frac{n+1}{2}$, n) 和 GBBM(n, n). 得到了方程 GBBM(m, 1) 和 GBBM(n, n) 的紧性解、孤子解、孤波相似解和周期解. 对方程 GBBM(1, n), GBBM($2-n$, n) 和 GBBM($\frac{n+1}{2}$, n),得到了代数行波解,并且给出了引起解物理结构变化的充分条件. 这里应该说明的是获得 GBBM(m, 1) 方程的解和文献[4]中用不同方法得到的解完全一致.

1 方程 GBBM(1, n), GBBM($2-n$, n) 和 GBBM($\frac{n+1}{2}$, n) 的代数行波解

对方程(3)寻求形如 $u(x,t)=u(\xi)$ 的行波解,其中 $\xi=\mu(x-ct)$ $(\mu\neq 0,\ c\neq 0)$. 这样方程(3)变为

$$-c\mu u_\xi + a\mu u_\xi + k\mu(u^m)_\xi + bc\mu^3(u^n)_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{4}$$

---

① 收稿日期:2010-07-07

基金项目:教育部重点资助项目(109140).

作者简介:李 楠(1965-),女,四川成都人,博士,讲师,主要从事偏微分方程研究.

对方程(4)积分并忽略积分常数得

$$(a-c)u+k(u^m)+bc\mu^2(u^n)_{\xi\xi}=0 \tag{5}$$

下面，在3种不同情况下研究方程(5)，即 $(m,n)=(1,n)$，$(2-n,n)$ 和 $(\frac{n+1}{2},n)$.

1.1　GBBM(1, n)方程($n\neq\pm1$)

令 $m=1$，$n\neq\pm1$，由方程(5)得

$$(a+k-c)u+bc\mu^2(u^n)_{\xi\xi}=0 \tag{6}$$

令 $(u^n)_\xi=Z$ 得 $(u^n)_{\xi\xi}=Z\frac{\mathrm{d}Z}{nu^{n-1}\mathrm{d}u}$，于是方程(6)变成

$$\frac{2bc\mu^2n}{(n-1)^2}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\frac{n-1}{2}}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{c-a-k}{n+1} \tag{7}$$

在复数域解方程(7)得

$$u=\left[\frac{(c-a-k)(n-1)^2}{2bcn(n+1)}(x-ct)^2\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

若 $m=n=1$，方程(6)变成一个具有常系数的微分方程，这是容易求解的.

1.2　GBBM($2-n$, n)方程($n\neq\pm1$)

当 $m=2-n$ 时，方程(5)变成

$$(a-c)u+k(u^{2-n})+bc\mu^2(u^n)_{\xi\xi}=0$$

作变换 $(u^n)_\xi=Z$ 得

$$[(a-c)u^n+ku]\mathrm{d}u+\frac{bc\mu^2}{n}Z\mathrm{d}Z=0 \tag{8}$$

积分(8)并忽略积分常数得

$$\frac{bc\mu^2}{2n}Z^2=\frac{c-a}{n+1}u^{n+1}-\frac{ku^2}{2}$$

从而有

$$bc\mu^2\left(\frac{2n}{n-1}\frac{\mathrm{d}u^{\frac{n-1}{2}}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{2n(c-a)}{n+1}-knu^{1-n},\ c\neq a \tag{9}$$

令 $W=u^{\frac{n-1}{2}}$，由(9)式推得

$$bc\mu^2\left(\frac{2n}{n-1}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{2n(c-a)W^2-kn(n+1)}{W^2(n+1)} \tag{10}$$

解方程(10)，得代数行波解

$$u=\left\{\frac{k(n+1)}{2(c-a)}+\frac{(c-a)(n-1)^2(x-ct)^2}{2bcn(n+1)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$

1.3　GBBM($\frac{n+1}{2}$, n)方程($n\neq\pm1,-\frac{1}{3}$)

和上面的方法相同，当 $m=\frac{n+1}{2}$ 时，作变换 $Z=(u^n)_\xi$，方程(5)变为

$$\frac{bc\mu^2}{2n}Z^2=\frac{c-a}{n+1}u^{n+1}-\frac{2k}{3n+1}u^{\frac{3n+1}{2}},\ c\neq a$$

从而有

$$\frac{bc\mu^2}{2n}\left(\frac{2n\mathrm{d}u^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{c-a}{n+1}-\frac{2k}{3n+1}u^{\frac{n-1}{2}} \tag{11}$$

由(11)式得 GBBM($\frac{n+1}{2}$, n)方程的代数行波解为

$$u=\left\{\frac{3n+1}{2k}\left[\frac{c-a}{n+1}-\frac{k^2(n-1)^2(x-ct)^2}{2bcn(3n+1)^2}\right]\right\}^{\frac{2}{n-1}}$$

2　GBBM(m, 1) 方程($m \neq \pm 1$)

当 $n = 1$ 时，方程(5) 为

$$(a-c)u + ku^m + bc\mu^2 u_{\xi\xi} = 0 \tag{12}$$

令 $u_\xi = Z$，方程(12) 变成

$$[(a-c)u + ku^m]\mathrm{d}u + bc\mu^2 Z\mathrm{d}Z = 0 \tag{13}$$

积分(13) 并忽略积分常数得

$$\frac{a-c}{2}u^2 + \frac{ku^{m+1}}{m+1} + \frac{bc\mu^2}{2}Z^2 = 0,\ c \neq a$$

令 $u^{m-1} = V$，有

$$u = V^{\frac{1}{m-1}},\ \mathrm{d}u = \frac{1}{m-1}V^{\frac{1}{m-1}-1}\mathrm{d}V$$

进一步有

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{2(m-1)^2V^2}{\mu^2}\left[\frac{c-a}{2bc} - \frac{kV}{bc(m+1)}\right] \tag{14}$$

根据 a,b,c 和 m 的取值情况，方程(14) 具有下面不同物理结构的解.

1) 当 $\frac{a-c}{bc} > 0$，$m > 1$ 时，解方程(14)，获得周期解

$$u = \left\{\frac{(c-a)(m+1)}{2k}\sec^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

和

$$u = \left\{\frac{(c-a)(m+1)}{2k}\csc^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

2) 当 $\frac{a-c}{bc} < 0$ 和 $m > 1$ 时，解(14) 式得孤子解

$$u = \left\{\frac{(c-a)(m+1)}{2k}\mathrm{sech}^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{c-a}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

和

$$u = \left\{-\frac{(c-a)(m+1)}{2k}\mathrm{csch}^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{c-a}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

3) 当$\frac{a-c}{bc} > 0$，$m \neq -1$，$m < 1$ 时，得到紧性解

$$\begin{cases} u = \left\{\frac{2k}{(c-a)(m+1)}\cos^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}, & \left|\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right| < \frac{\pi}{2} \\ u = 0, \text{其它} & \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u = \left\{\frac{2k}{(c-a)(m+1)}\sin^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}, & \left|\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right| < \pi \\ u = 0, \text{其它} & \end{cases}$$

4) 当$\frac{a-c}{bc} < 0$，$m \neq -1$，$m < 1$ 时，解方程(14) 得到方程 GBBM(m, 1) 孤波相似解

$$u = \left\{\frac{2k}{(c-a)(m+1)}\cosh^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{15}$$

和

$$u = \left\{-\frac{2k}{(c-a)(m+1)}\sinh^2\left[\frac{m-1}{2}\sqrt{\frac{a-c}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}} \tag{16}$$

以上这些解与文献[4]中用 tanh 方法和 sine-cosine 方法得到的解完全一致.

3 GBBM(n, n) 方程($n \neq \pm 1$)

在方程(5)中令 $m = n$，作变换$(u^n)_\xi = U$ 得

$$[(a-c)u + ku^n]u^{n-1}\mathrm{d}u + \frac{bc\mu^2}{n}U\mathrm{d}U = 0 \tag{17}$$

积分方程(17)并令积分常数为 0 得

$$\frac{bc\mu^2}{2n}U^2 = \frac{c-a}{n+1}u^{n+1} - \frac{ku^{2n}}{2n}$$

从而有

$$bc\mu^2\left(\frac{2n\mathrm{d}u^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{2n(c-a)}{n+1} - ku^{n-1}$$

令 $u^{\frac{n-1}{2}} = W$ 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^2\left[\frac{2n(c-a)}{bc(n+1)} - \frac{k}{bc}W^2\right] \tag{18}$$

由常数 a,b,c,k 和 n 的不同取值可得方程(18)的具不同物理结构的解.

1) 当$\frac{k}{bc} > 0$，$n > 1$ 时，解方程(18)，有下面的紧性解

$$\begin{cases} u = \left\{\frac{2n(c-a)}{k(n+1)}\cos^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}, & \left|\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right| < \frac{\pi}{2} \\ u = 0, \text{其它} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u = \left\{\frac{2n(c-a)}{k(n+1)}\sin^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}, & \left|\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right| < \pi \\ u = 0, \text{其它} \end{cases}$$

2) 当$\frac{k}{bc} < 0$，$n > 1$ 时，方程(18)有孤波相似解

$$u = \left\{\frac{2n(c-a)}{k(n+1)}\cosh^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{-\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$

和

$$u = \left\{-\frac{2n(c-a)}{k(n+1)}\sinh^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{-\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$

3) 当$\frac{k}{bc} > 0$，$n < 1$ 时，方程(18)有周期解

$$u = \left\{\frac{k(n+1)}{2n(c-a)}\sec^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

和

$$u = \left\{\frac{k(n+1)}{2n(c-a)}\csc^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

4) 当$\frac{k}{bc} < 0$，$n < 1$ 时，有孤立子解

$$u = \left\{\frac{k(n+1)}{2n(c-a)}\mathrm{sech}^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{-\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

和

$$u = \left\{-\frac{k(n+1)}{2n(c-a)}\mathrm{csch}^2\left[\frac{n-1}{2n}\sqrt{-\frac{k}{bc}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

4　结　　论

本文中，基于微分方程的降阶方法，推导出了 5 种不同情形的广义 BBM 方程的显式行波解，即 GBBM$(m,1)$，GBBM$(1,n)$，GBBM$(2-n,n)$，GBBM$(\frac{n+1}{2},n)$ 和 GBBM(n,n) 方程. 对于方程 GBBM$(m,1)$ 和 GBBM(n,n)，指出了导致解的物理结构变化的条件，即存在紧性解、孤立子解、孤波相似解和周期解的条件. 另外，也获得了方程 GBBM$(1,n)$，GBBM$(2-n,n)$ 和 GBBM$(\frac{n+1}{2},n)$ 的代数行波解. 事实上，本文中求精确解的方法也可用来找满足某些条件的其他偏微分方程的精确解.

参考文献：

[1] BENJAMIN T B，BONA J L，MAHONY J. Model Equation for Long Waves in Nonlinear Dispersive System [J]. Philos Trans Royal Soc，1972，272(1)：47－78.

[2] BONA J L，SMITH R. The Initial Value Problem for the Korteweg-de-Vries Equation [J]. Philos Trans Royal Soc，1975，278(3)：555－601.

[3] SAUT J C，ZETKOV N T. Global Well-Posedness for the KP-BBM Equations [J]. Appl Math Res Express，2004，1(1)：1－6.

[4] WAZWAZ A M. The Sine-cosine and Tanh Method：Reliable Tools for Analytic Treatment of Nonlinear Dispersive Equations [J]. Appl Math Comput，2006，173(2)：150－164.

[5] WAZWAZ A M. A Variable Separated ODE Method for Solving the Triple Sine-Gordon and the Triple Sinh-Gordon Equations [J]. Chaos，Solitons and Fractals，2007，33(5)：703－710.

[6] LAI S Y，WU Y H，Wiwatanapataphee B. On Exact Travelling Wave Solutions for Two Types of Nonlinear $K(n,n)$ Equations and a Generalized $K\ P$ Equation [J]. J Comput Appl Math，2008，212(3)：291－299.

Compact and Noncompact Structures for a Generalized BBM Model

LI　Nan[1]，　XIE　Zhi[2]

1. Department of Applied Mathematics，Southwestern University of Finance and Economics，Chengdu 610074，China；

2. Department of Oil and Gas Storage and Transportation，Southwest Petroleum University，Xindu Sichuan 644000，China

Abstract：A mathematical approach based on mathematical transforms and the reduction of order for solving differential equation is developed to investigate a generalized Benjamin，Bona and Mahony (BBM) equation. Various exact travelling wave solutions of the equation，including compactons，solitons，solitary patterns，periodic solutions and algebraic travelling wave solutions，are derived. The sufficient conditions that determine the physical structures of the solutions are identified.

Key words：nonlinear equations；compactons；solitons；periodic solutions；high order terms

责任编辑　张　枸