第 36 卷　第 1 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2011 年 2 月
Vol. 36　No. 1　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0066-07

二阶差分方程半正 m-点特征值问题正解的存在性①

金立芸[1]，　高承华[2]，　蔚治国[1]

1. 兰州职业技术学院 信息工程系，兰州 730070；
2. 西北师范大学 数学与信息科学学院，兰州 730070

摘要： 运用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理讨论了二阶差分方程半正 m-点特征值问题正解的存在性.

关　键　词： Guo-Krasnoselskii 不动点定理；半正；正解；存在性
中图分类号： O175.7　　**文献标志码：** A

设 $\mathbb{T}=\{a+1,\ \cdots,\ b\}$，$\hat{\mathbb{T}}=\{a,\ a+1,\ \cdots,\ b,\ b+1\}$，$a,\ b\in\mathbb{N}$，$a<b-1$，$m\leqslant b-a$.

由于差分方程广泛的实际应用背景[1-5]，近年来，对差分方程边值问题的研究受到了广泛的关注.

文献[1] 研究了二阶差分方程三点边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+a(t)f(u(t))=0 & t\in\mathbb{T}\\ u(0)=0 & u(T+1)=\alpha u(\eta)\end{cases}$$

正解的存在性，其中 f：$[0,\ \infty)\longrightarrow[0,\ \infty)$.

但是，大部分关于差分方程边值问题正解的研究均要求非线性项是非负的.

文献[2] 研究了二阶两点差分方程半正问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+\mu f(t,\ u(t))=0 & t\in\mathbb{T}\\ u(0)=0 & u(T+1)=\alpha u(\eta)\end{cases}$$

正解的存在性，其中 f：$\mathbb{T}\times[0,\ \infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续且存在常数 $M>0$ 使得对任意的 $t\in\mathbb{T}$ 以及任意的 $u\geqslant 0$ 有 $f(t,\ u)+M\geqslant 0$.

但是，关于二阶差分方程半正多点问题的研究仍比较少. 受文献[1-3] 的启发，本文试图讨论二阶差分方程 m-点边值问题

$$\begin{cases}\Delta(p(t)\nabla y(t))-q(t)y(t)+\lambda h(t)f(y)=0 & t\in\mathbb{T}\\ \alpha y(a+1)-\beta p(a+1)\nabla y(a+1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i y(t_i) & \\ \nu y(b+1)+\delta p(b+1)\nabla y(b+1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i y(t_i) & \end{cases}\tag{1}$$

至少有一个正解的存在性定理，其中 f：$[0,\ \infty)\rightarrow\mathbb{R}$ 连续且存在常数 $M>0$ 使得 $f(y)\geqslant -M$，$t\in\mathbb{T}$，λ 是正参数，$\alpha,\beta,\nu,\delta\in[0,\ \infty)$，$c_i,d_i\in[0,\ \infty)$，$i\in\{1,\ \cdots,\ m-2\}$.

记 $\mathscr{B}=\{u\mid u:\ \hat{\mathbb{T}}\longrightarrow\mathbb{R}\}$，其上范数为 $\|u\|=\max\limits_{t\in\hat{\mathbb{T}}}|u(t)|$，则 $\mathscr{B}$ 在 $\|\cdot\|$ 之下构成 Banach 空间.

---

① 收稿日期：2009-08-31
作者简介：金立芸(1978-)，女，辽宁抚顺人，讲师，硕士，主要从事常微分方程与动力系统的研究.

总假定：

(A1) p：$\hat{\mathbb{T}}\backslash\{a\}\longrightarrow(0,\infty)$，$q$，$h$：$\mathbb{T}\longrightarrow(0,\infty)$；

(A2) $\alpha,\beta,\nu,\delta\in[0,\infty)$，且 $\alpha\nu+\alpha\delta+\beta\nu>0$，$\beta-\dfrac{\alpha}{p(a+1)}\geqslant 0$，$c_i,d_i\in[0,\infty)$，$i\in\{1,\cdots,m-2\}$；

(A3) f：$[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续且存在常数 $M>0$，使得 $f(y)\geqslant -M$，$t\in\mathbb{T}$；

(A4) $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{f(y)}{y}=\infty$.

首先构造二阶边值问题

$$\Delta(p(t)\nabla y(t))-q(t)y(t)+u(t)=0\qquad t\in\mathbb{T}\tag{2}$$

$$\alpha y(a+1)-\beta p(a+1)\nabla y(a+1)=0\tag{3}$$

$$\nu y(b+1)+\delta p(b+1)\nabla y(b+1)=0\tag{4}$$

的 Green 函数，其中 α,β,ν,δ 是实数且 $|\alpha|+|\beta|\neq 0$，$|\nu|+|\delta|\neq 0$.

引理 1　假设(A1) 和(A2) 成立. ψ 和 ϕ 分别是线性问题

$$\begin{cases}-\Delta(p\nabla\psi(t))+q(t)\psi(t)=0 & t\in\mathbb{T}\\ \psi(a+1)=\beta & p(a+1)\nabla\psi(a+1)=\alpha\end{cases}\tag{5}$$

和

$$\begin{cases}-\Delta(p\nabla\phi(t))+q(t)\phi(t)=0 & t\in\mathbb{T}\\ \phi(b+1)=\delta & p(b+1)\nabla\phi(b+1)=-\nu\end{cases}\tag{6}$$

的解，则

(i) ψ 在$\{a+1,\cdots,b+1\}$ 上严格单调递增，在 $\hat{\mathbb{T}}$ 上单调递增；

(ii) ϕ 在$\{a,\cdots,b\}$ 上严格单调递减，在 $\hat{\mathbb{T}}$ 上单调递减.

令

$$\rho=-W_t(\psi,\phi)=p(t)(\nabla\psi(t)\phi(t)-\psi(t)\nabla\phi(t))\tag{7}$$

因为任意两个解的朗斯基行列式是不依赖于 t 的，计算 $t=a+1$，$t=b+1$ 处的值，得

$$\rho=\alpha\phi(a+1)-\beta p(a+1)\nabla\phi(a+1)=\nu\psi(b+1)+\delta p(b+1)\nabla\psi(b+1)$$

注意 $\rho\neq 0$ 当且仅当(5) 式中的齐次方程在边值条件(3)－(4) 下仅有平凡解.

引理 2　假定(A1) 和(A2) 成立. 若 $\rho\neq 0$，则非齐次边值问题(2)－(4) 有唯一解 y 且满足 $y(t)=\sum\limits_{s=a+1}^{b}G(t,s)u(s)$，$t\in\hat{\mathbb{T}}$，其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\psi(t)\phi(s) & t\leqslant s\\ \psi(s)\phi(t) & s\leqslant t\end{cases}\tag{8}$$

显然，$G(t,s)$ 是满足边值问题(2)－(4) 的 Green 函数.

引理 3　假定(A1),(A2) 成立，函数 ψ,ϕ 满足：$\psi(t)\geqslant 0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}$；$\psi(t)>0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}\backslash\{a\}$；$p(t)\nabla\psi(t)\geqslant 0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}\backslash\{a\}$；$\phi(t)\geqslant 0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}$；$\phi(t)>0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}\backslash\{b+1\}$；$p(t)\nabla\phi(t)\leqslant 0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}\backslash\{a\}$.

证　证明方法与引理 1 类似.

令

$$D=\begin{vmatrix}-\sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i\psi(t_i) & \rho-\sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i\phi(t_i)\\ \rho-\sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i\psi(t_i) & -\sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i\phi(t_i)\end{vmatrix}$$

引理 4 假定(A1)和(A2)成立. 如果 $D \neq 0$, $\rho \neq 0$, 则非齐次问题

$$\begin{cases} \Delta(p(t)\nabla y(t)) - q(t)y(t) + u(t) = 0 & t \in \mathbb{T} \\ \alpha y(a+1) - \beta p(a+1)\nabla y(a+1) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i y(t_i) \\ \nu y(b+1) + \delta p(b+1)\nabla y(b+1) = \sum_{i=1}^{m-2} d_i y(t_i) \end{cases} \tag{9}$$

有唯一解

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{b} G(t,s)u(s) + A(u)\psi(t) + B(u)\phi(t) \qquad t \in \hat{\mathbb{T}} \tag{10}$$

其中, 函数 A, B 定义为

$$A(u) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m-2} c_i \sum_{s=a+1}^{b} G(t_i,s)u(s) & \rho - \sum_{i=1}^{m-2} c_i \phi(t_i) \\ \sum_{i=1}^{m-2} d_i \sum_{s=a+1}^{b} G(t_i,s)u(s)) & -\sum_{i=1}^{m-2} d_i \phi(t_i) \end{vmatrix} \tag{11}$$

和

$$B(u) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{m-2} c_i \psi(t_i) & \sum_{i=1}^{m-2} c_i \sum_{s=a+1}^{b} G(t_i,s)u(s) \\ \rho - \sum_{i=1}^{m-2} d_i \psi(t_i) & \sum_{i=1}^{m-2} d_i \sum_{s=a+1}^{b} G(t_i,s)u(s)) \end{vmatrix} \tag{12}$$

证 不难证明(10)式是问题(9)的一个解. 故(2)式的解表示为:

$$y(t) = \frac{1}{\rho}\sum_{s=a+1}^{t-1} \phi(t)\psi(s)u(s) + \frac{1}{\rho}\sum_{s=t}^{b} \psi(t)\phi(s)u(s) + A\psi(t) + B\phi(t) \tag{13}$$

A, B 为常数. 对(13)式两端求后向差分, 再乘以 $p(t)$ 得:

$$p(t)\nabla y(t) = \frac{p(t)\nabla\phi(t)}{\rho}\sum_{s=a+1}^{t-1}\psi(s)u(s) + \frac{p(t)\nabla\psi(t)}{\rho}\sum_{s=t}^{b}\phi(s)u(s) + Ap(t)\nabla\psi(t) + Bp(t)\nabla\phi(t) \tag{14}$$

对(14)式两端求前向差分:

$$\begin{aligned} \Delta(p\nabla y(t)) = {} & \Delta\left(\frac{p(t)\nabla\phi(t)}{\rho}\right)\sum_{s=a+1}^{t}\psi(s)u(s) + \frac{p(t)\nabla\phi(t)}{\rho}\psi(t)u(t) + A\Delta(p(t)\nabla\psi(t)) + \\ & B\Delta(p(t)\nabla\phi(t)) + \Delta\left(\frac{p(t)\nabla\psi(t)}{\rho}\right)\sum_{s=t+1}^{b}\phi(s)u(s) - \frac{p(t)\nabla\psi(t)}{\rho}\phi(t)u(t) \end{aligned} \tag{15}$$

ψ 和 ϕ 是问题(5)和(6)的解, 代入(15)式可得

$$\begin{aligned} \Delta(p(t)\nabla y(t)) = {} & \frac{q(t)}{\rho}\sum_{s=a+1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s) + \frac{u(t)}{\rho}p(t)\nabla\phi(t)\psi(t) + \frac{q(t)}{\rho}\sum_{s=t+1}^{b}\psi(t)\phi(s)u(s) - \\ & \frac{u(t)}{\rho}p(t)\nabla\psi(t)\phi(t) + q(t)(A\psi(t) + B\phi(t)) \end{aligned}$$

其中 ρ 为(7)式中的 ψ 和 ϕ 的朗斯基行列式, 则 $\Delta(p\nabla y(t)) = q(t)y(t) - u(t)$. 又由(13)式, 有

$$\begin{cases} y(a+1) = \frac{\psi(a+1)}{\rho}\sum_{s=a+1}^{b}\phi(s)u(s) + A\psi(a+1) + B\phi(a+1) \\ p(a+1)\nabla y(a+1) = \frac{p(a+1)\nabla\psi(a+1)}{\rho}\sum_{s=a+1}^{b}\phi(s)u(s) + \\ Ap(a+1)\nabla\psi(a+1) + Bp(a+1)\nabla\phi(a+1) \end{cases} \tag{16}$$

对(16)式中第一式乘以 α，第二式乘以 β，由(3)和(4)式中的初始条件可得

$$B[\alpha\phi(a+1)-\beta p(a+1)\nabla\phi(a+1)]=\sum_{i=1}^{m-2}c_i\Big(\sum_{s=a+1}^{b}G(t_i,s)u(s)+A\psi(t_i)+B\phi(t_i)\Big) \tag{17}$$

又因为

$$\begin{cases}y(b+1)=\dfrac{\phi(b+1)}{\rho}\displaystyle\sum_{s=a+1}^{b}\psi(s)u(s)+A\psi(b+1)+B\phi(b+1)\\ p(b+1)\nabla y(b+1)=\dfrac{p(b+1)\nabla\phi(b+1)}{\rho}\displaystyle\sum_{s=a+1}^{b}\psi(s)u(s)+Ap(b+1)\nabla\psi(b+1)+Bp(b+1)\nabla\phi(b+1)\end{cases} \tag{18}$$

所以

$$A[\nu\psi(b+1)+\delta p(b+1)\nabla\psi(b+1)]=\sum_{i=1}^{m-2}d_i\Big(\sum_{s=a+1}^{b}G(t_i,s)u(s)+A\psi(t_i)+B\phi(t_i)\Big)$$

由(17)，(18)及(7)式，可得

$$\begin{cases}-A\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}c_i\psi(t_i)+B\Big[\alpha\phi(a+1)-\beta p(a+1)\nabla\phi(a+1)-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\phi(t_i)\Big]=\sum_{i=1}^{m-2}c_i\sum_{s=a+1}^{b}G(t_i,s)u(s)\\ A\Big[\nu\psi(b+1)+\delta p(b+1)\nabla\psi(b+1)-\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}d_i\psi(t_i)\Big]-B\sum_{i=1}^{m-2}d_i\phi(t_i)=\sum_{i=1}^{m-2}d_i\sum_{s=a+1}^{b}G(t_i,s)u(s)\end{cases}$$

进一步可以验证(11)和(12)式成立.

引理 5　设(A1)和(A2)成立. 假定

(A5) $D<0$，$\rho-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\phi(t_i)>0$，$\rho-\sum_{i=1}^{m-2}d_i\psi(t_i)>0$.

则对 $t\in\hat{\mathbb{T}}$，$u\geqslant 0$，问题(9)的唯一解(10)满足 $y(t)\geqslant 0$，$t\in\hat{\mathbb{T}}$.

证　由(A5)可知，$\rho>0$，进而 $G(t,s)\geqslant 0$，结合(A1)，(A2)，(A5)可知 $A(u)$，$B(u)\geqslant 0$.

引理 6　假设(A1)，(A2)和(A5)成立. 若 $u\geqslant 0$，则边值问题(1)的唯一解满足 $y(t)\geqslant\frac{1}{2}\gamma(t)\|y\|$，$\|y\|=\max_{t\in\hat{\mathbb{T}}}|y(t)|$，其中

$$\gamma(t)=\frac{1}{k_0}[\tilde{q}(t)+\tilde{A}\psi(t)+\tilde{B}\phi(t)] \tag{19}$$

且 $k_0\in\mathbb{Z}^+$ 为固定常数，使得：$\frac{1}{k_0}[\tilde{q}(t)+\tilde{A}\psi(t)+\tilde{B}\phi(t)]\leqslant 1$，$t\in\hat{\mathbb{T}}$；$\tilde{q}(t)=\min\left\{\frac{\phi(t)}{\phi(a)},\frac{\psi(t)}{\psi(b+1)}\right\}\in(0,1)$；$\tilde{A}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{m-2}c_i\tilde{q}(t_i) & \rho-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\phi(t_i)\\ \sum_{i=1}^{m-2}d_i\tilde{q}(t_i) & -\sum_{i=1}^{m-2}d_i\phi(t_i)\end{vmatrix}$；$\tilde{B}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\psi(t_i) & \sum_{i=1}^{m-2}c_i\tilde{q}(t_i)\\ \rho-\sum_{i=1}^{m-2}d_i\psi(t_i) & \sum_{i=1}^{m-2}d_i\tilde{q}(t_i)\end{vmatrix}$.

证　由(A1)，(8)式和引理 2 可证.

引理 7　假定(A1)，(A2)，(A5)成立，且 $D\neq 0$. 若 $\overline{w}$ 是问题

$$\begin{cases}\Delta(p(t)\nabla y(t))-q(t)y(t)+1=0,\ t\in\mathbb{T}\\ \alpha y(a+1)-\beta p(a+1)\nabla y(a+1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}c_iy(t_i)\\ \nu y(b+1)+\delta p(b+1)\nabla y(b+1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}d_iy(t_i)\end{cases}$$

的解，则存在常数 $E>0$，使得 $\overline{w}(t)\leqslant E\gamma(t)$.

证 由引理 2－4 可知

$$\begin{aligned}\overline{w}(t)=&\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)=\\&\frac{1}{\rho}\Big[\sum_{s=a+1}^{t-1}\phi(t)\psi(s)+\sum_{s=t}^{b}\psi(t)\phi(s)\Big]+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)\leqslant\\&\frac{1}{\rho}\Big[\sum_{s=a+1}^{t-1}\phi(t)\psi(t)+\sum_{s=t}^{b}\psi(t)\phi(t)\Big]+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)\leqslant\\&\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(t)\psi(t)+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)\leqslant\\&\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(a+1)\psi(b+1)\tilde{q}(t)+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)=\\&\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(a+1)\psi(b+1)+\frac{A(1)}{\widetilde{A}}\widetilde{A}\psi(t)+\frac{B(1)}{\widetilde{B}}\widetilde{B}\phi(t)\leqslant\\&\mu[\tilde{q}(t)+\widetilde{A}\psi(t)+\widetilde{B}\phi(t)]=E\gamma(t)\end{aligned}$$

其中 $E=k_0\mu$，且

$$\mu=\begin{cases}\max\Big\{\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(a+1)\psi(b+1),\ \frac{A(1)}{\widetilde{A}},\ \frac{B(1)}{\widetilde{B}}\Big\} & \sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i\neq 0 \quad \sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i\neq 0\\ \max\Big\{\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(a+1)\psi(b+1),\ \frac{B(1)}{\widetilde{B}}\Big\} & \sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i\neq 0 \quad \sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i=0\\ \max\Big\{\frac{1}{\rho}(b-a)\phi(a+1)\psi(b+1),\ \frac{A(1)}{\widetilde{A}}\Big\} & \sum\limits_{i=1}^{m-2}c_i=0 \quad \sum\limits_{i=1}^{m-2}d_i\neq 0\end{cases}\tag{20}$$

注意到若 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}d_i\neq 0$，则 $\widetilde{A}>0$；若 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}c_i\neq 0$，则 $\widetilde{B}>0$. 因此常数 E 在(20)式中有定义.

定理 1 假设(A1)－(A5)成立，则对充分小的 $\lambda>0$ 问题(1)至少存在一个正解.

证 令每一个 λ 满足 $0<\lambda<\min\Big\{\frac{1}{E_1\|\overline{w}\|},\frac{1}{2EM}\Big\}$，其中 $E_1=M_1\times M_2$，$M_1=\max\limits_{t\in\mathbb{T}}|h(t)|$，$M_2=\sup\{g(y)\mid y\in[0,1]\}$，$g(y)=f(y)+M$，$E$ 是引理 7 中定义的常数.

若 $w=\lambda M\overline{w}$，则 y 是问题(1)的一个正解，当且仅当 $\tilde{y}=y+w$ 是问题

$$\begin{cases}\Delta(p(t)\nabla y(t))-q(t)y(t)+\lambda h(t)\tilde{g}(y-w)=0,\ t\in\mathbb{T}\\ \alpha y(a+1)-\beta p(a+1)\nabla y(a+1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}c_iy(t_i)\\ \nu y(b+1)+\delta p(b+1)\nabla y(b+1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}d_iy(t_i)\end{cases}$$

的一个解，其中 $\tilde{y}(t)>w(t)$，$t\in\mathbb{T}$，且

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases}g(y) & y\geqslant 0\\ g(0) & y<0\end{cases}$$

显然，$\mathscr{B}=\{u\mid u:\hat{\mathbb{T}}\longrightarrow\mathbb{R}\}$ 在范数 $\|y\|=\sup\limits_{t\in\hat{\mathbb{T}}}|y(t)|$ 下构成 Banach 空间，定义 $\mathscr{P}=\Big\{y\in\mathscr{B}:y(t)\geqslant\frac{1}{2}w(t)\|y\|,t\in\hat{\mathbb{T}}\Big\}$，其中 $\gamma(t)$ 如(19)式中所定义. 则 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个锥.

对每一个 $v\in\mathscr{P}$，若 $y=Tv$ 是问题

$$\begin{cases}\Delta(p(t)\nabla y(t))-q(t)y(t)+\lambda h(t)\tilde{g}(v-w)=0,\ t\in\mathbb{T}\\ \alpha y(a+1)-\beta p(a+1)\nabla y(a+1)=\sum_{i=1}^{m-2}c_i y(t_i)\\ \nu y(b+1)+\delta p(b+1)\nabla y(b+1)=\sum_{i=1}^{m-2}d_i y(t_i)\end{cases}$$

的解，由引理 4 得

$$Tv=\lambda\Big[\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)h(s)\tilde{g}(v-w)+A(\tilde{g}(v-w))\psi(t)+B(\tilde{g}(v-w))\phi(t)\Big]$$

由引理 6 可知，$T:\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{P}$ 是全连续的. 下证 T 在 $\mathscr{P}$ 中有不动点.

定义 $\Omega_1=\{y\in\mathscr{B}:\ \|y\|<1\}$，则对 $\forall y\in\partial\Omega_1\cap\mathscr{P}$,

$$(Tv)(t)=\lambda\Big[\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)h(s)\tilde{g}(v-w)+A(\tilde{g}(v-w))\psi(t)+B(\tilde{g}(v-w))\phi(t)\Big]\leqslant$$

$$\lambda E_1\Big[\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)+A(1)\psi(t)+B(1)\phi(t)\Big]=\lambda E_1\overline{w}(t)\leqslant 1$$

因为 $0\leqslant v-w\leqslant v\leqslant 1$，所以 $\|Ty\|\leqslant\|y\|$，$y\in\partial\Omega_1\cap\mathscr{P}$. 不妨取定常数 $\widetilde{M}>0$ 满足 $1\leqslant\frac{1}{4}\lambda\widetilde{M}\Gamma\min\limits_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)h(s)$，其中 $\Gamma=\min\limits_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\gamma(t)$. 由(A4) 可知存在常数 $F>0$，使得$\frac{\tilde{g}(s)}{s}\geqslant\widetilde{M}$，$s\in[F,\infty)$.

令 $\rho_2=\max\left\{4,\ 4\lambda EM,\ \frac{4F}{\Gamma}\right\}$. 定义 $\Omega_2=\{y\in\mathscr{B}:\ \|y\|<\rho_2\}$. 对 $y\in\partial\Omega_2\cap\mathscr{P}$，由引理 7 和引理 6 可知

$$y(s)-w(s)=y(s)-\lambda M\overline{\omega}(s)\geqslant y(s)-\lambda M E\gamma(s)\geqslant y(s)-\frac{\lambda M E}{\rho_2}2y(s)\geqslant\frac{1}{2}y(s)$$

且

$$\min_{s\in\hat{\mathbb{T}}}(y(s)-w(s))\geqslant\min_{s\in\hat{\mathbb{T}}}\frac{1}{2}y(s)\geqslant\min_{s\in\hat{\mathbb{T}}}\frac{1}{4}\|y\|\gamma(s)=\frac{1}{4}\rho_2\Gamma\geqslant F$$

进一步，对 $y\in\partial\Omega_2\cap\mathscr{P}$，有

$$\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}(Ty)(t)=\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)h(s)\tilde{g}(y-w)+A(\tilde{g}(y-w))\psi(t)+B(\tilde{g}(y-w))\phi(t)\geqslant$$

$$\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)h(s)\tilde{g}(y-w)\geqslant$$

$$\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)\widetilde{M}(y(s)-w(s))h(s)\geqslant$$

$$\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)\widetilde{M}\frac{1}{2}y(s)h(s)\geqslant$$

$$\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)\widetilde{M}\frac{1}{4}\gamma(s)\|y\|h(s)\geqslant$$

$$\lambda\min_{t\in\hat{\mathbb{T}}}\sum_{s=a+1}^{b}G(t,s)\widetilde{M}\frac{1}{4}\Gamma\|y\|h(s)\geqslant\|y\|$$

由此可推出 $\|Ty\|\geqslant\|y\|$，$y\in\partial\Omega_2\cap\mathscr{P}$. 由锥拉伸压缩不动点定理[6]，$T$ 有一个不动点 $\tilde{y}$，且 $1\leqslant\|\tilde{y}\|\leqslant\rho_2$，有

$$\tilde{y}(t)\geqslant\frac{1}{2}\gamma(t)\geqslant\frac{1}{2}(2\lambda E M)\gamma(t)\geqslant\lambda M\overline{w}(t)=w(t)$$

所以 $y=\tilde{y}-w$ 是问题(1) 的一个正解.

参考文献:

[1] MA Ru-yun, Raffoul Y. Positive Solutions of Three-Point Nonlinear Discrete Second Order Boundary Value Problem [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2004, 2(10): 129－138.

[2] AGARWAL R P, O'REGAN D. Nonpositone Discrete Boundary Value Problems [J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39(2): 207－215.

[3] GYORI I, LADAS G. Oscillation Theory of Delay Difference Equations with Applications [C] //Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 1991.

[4] AGRWAL R P, O'REAGN D. A Coupled System of Defference Equations [J]. Appl Math Comp, 2000, 114(1): 39－49.

[5] WONG P J Y, AGARWAL R P. On the Existence of Positive Solutions of Singular Boundary Value Problems for High Order Difference Equations [J]. Nonlinear Anal T M A, 1997, 28(2): 277－287.

[6] KRASNOSELSKII M A. Positive Solutions of Operator Equations [J]. SIAM, 1966, 8(1): 122－123.

[7] MA Ru-yun. Existence of Positive Solutions for Superlinear Semipositone *m*-Point Boundary Value Problems [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2003, 46(02): 279－292.

[8] MA Ru-yun. Existence of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations [J]. Math Anal Appl, 2004, 292(1): 49－59.

[9] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[10] 王 丽, 高承华. 一类二阶差分方程边值共振问题的可解性 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(11): 9－13.

Existence of Positive Solution for Semiposione *m*-point Discrete Second Order Eigenvalue Problems

JIN Li-yun[1], GAO Cheng-hua[2], YU Zhi-guo[1]

1. Computer Science and Technology Department, Lanzhou Vocational Technical College, Lanzhou 730070, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, by using Guo-Krasnoselskii's fixed point theorem, the existence of positive solutions to a discrete second order semiposione *m*-point eigenvalue problems is obtained.

Key words: Guo-Krasnoselskii fixed point theorem; semipositone; positive solutions; existence

责任编辑 张 枸