文章编号:1000-5471(2011)01-0062-04

弱耗散的广义 Camassa-Holm 方程整体吸引子①

郭战伟, 丁丹平

广东商学院 华商学院,广州 511300

摘要: 在一定边界条件下研究一类新的带弱耗散项的色散水波方程的动力学行为,获得其整体解及整体吸引子的存在.

关 键 词: Camassa-Holm 方程;整体解;整体吸引子

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

近年来有许多关于 C—H 方程的尖峰孤子解及爆破解、局部及整体适定性、Blow-up 及弱解的研究[1-2]. 文献[3]由 C—H 方程提出三维粘性方程来近似表现管道湍流现象. 研究表明粘性 C—H 方程是对实际物理问题的更好的近似表示,而实际的物理流体总是存在粘性等作用所引起的能量耗散. 文献[4-5]讨论了强耗散项的 C—H 方程在周期边界条件下与[0, 1]边界条件下的解及其整体吸引子存在性. 以上的工作中考虑的是强耗散 C—H 方程,但是正如 KdV 方程一样,强耗散方程的光滑解不能合理地解释自然水波的碎波现象,鉴于这样的背景,本文研究弱耗散的广义 C—H 方程在周期边界条件下整体解的存在性

$$u_t - u_{xxt} - \varepsilon u_{xx} + g(u)_x = 2u_x u_{xx} + u u_{xxx} \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

其中:ε 是耗散系数,$g(u)$ 为 u 的多项式函数. 本文中 $(u, v) = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积,$\Omega = [0, l]$,$|\,|_0 = |\,|_{L^2}$ 表示由内积给出的范数,$|\,|_\infty = |\,|_{L^\infty}$,$|\,u\,|_n^2 = \left|\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|^2 (n = 0,1,2,3,4)$.

1 整体解存在性

定理 1 假设 $u_0 \in H^3(R)$,$u(0, t) = u(l, t) u_t(0, t) = u_t(l, t)$ 成立,且 $|\,u_0\,|_2 \leqslant \dfrac{m_0}{2k_0}$(其中 $k_0 = \max\left\{\dfrac{c^2 A^2 q^2 \lambda_1^{-1}}{\varepsilon} M_0^{\frac{2q-3}{2}},\ \dfrac{9c^2}{2\varepsilon} M_0\right\}$,$m_0 = \min\left\{(2q-3)\dfrac{\varepsilon\rho}{2},\ \dfrac{\varepsilon\rho}{2}\right\}$),则方程(1)存在唯一整体解.

引理 1 假设 $u_0 \in H^3(R)$,$u(0, t) = u(l, t)$,$u_t(0, t) = u_t(l, t)$ 成立,并且 $|\,u_0\,|_2 \leqslant \dfrac{m_0}{2k_0}$,则方程(1)的解在 $H^1(\Omega)$ 上具有整体指数稳定性.

证 在区域 Ω 上用 u 对方程(1)的两边作内积,有

$$(u_t, u) - (u_{xxt}, u) - \varepsilon(u_{xx}, u) + (g(u)_x, u) = (2u_x u_{xx}, u) + (u u_{xxx}, u)$$

由分部积分及边界周期条件

$$(u_t, u) - (u_{xxt}, u) = \int_\Omega u_t u\,\mathrm{d}x - [u u_{xt}]_\Omega + \int_\Omega u_t u\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\,u\,|_0^2 + |\,u\,|_1^2)$$

$$(u_x u, u) = \int_\Omega u^2 u_x\,\mathrm{d}x = 0 (u_{xx}, u) = [u u_x]_\Omega - \int_\Omega {u_x}^2\,\mathrm{d}x = -|\,u\,|_1^2$$

① 收稿日期:2009-09-18
基金项目:江苏省高校自然科学研究计划(05KJB110018);江苏大学高级人才基金资助项目(07JDG024).
作者简介:郭战伟(1979-),男,河南周口人,硕士,讲师.

$$(uu_{xxx},u)=[u^2u_{xx}]_\Omega-2\int_\Omega uu_xu_{xx}\mathrm{d}x=-2(u_xu_{xx},u)$$

$$(g(u)_x,u)=[g(u)u]_\Omega-\int_\Omega g(u)u_x\mathrm{d}x=[g(u)u]_\Omega-[\varphi(u)]_\Omega=$$

$$g(u(l,t))u(l,t)-g(u(0,t))u(0,t)-g(u(l,t))u(l,t)+g(u(0,t))u(0,t)=0$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|u|_1^2)+2\varepsilon|u|_1^2=0 \tag{2}$$

设 $\rho=\min\{1,\lambda_1\}$，λ_1 是算子 $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 在周期边界条件下的最小特征值，则由(2) 式可得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_0^2+|u|_1^2)+\varepsilon\rho(|u|_0^2+|u|_1^2)\leqslant 0$. 根据 Gronwall 不等式有 $|u|_0^2+|u|_1^2\leqslant(|u_0|_0^2+|u_0|_1^2)\mathrm{e}^{-\varepsilon\rho t}=M_0^2\mathrm{e}^{-\varepsilon\rho t}$，引理 1 成立.

引理 2　假设 $u_0\in H^3(R)$，$u(0,t)=u(l,t)$，$u_t(0,t)=u_t(l,t)$ 成立，且当 $|u_0|_2\leqslant\dfrac{m_0}{2k_0}$，$\max g(u)\leqslant A|u|^q(\dfrac{3}{2}<q\leqslant 3)$ 时. 方程(1) 的解在 $H^2(\Omega)$，$H^3(\Omega)$ 上具有一致有界吸收集.

证　在 Ω 上用 u_{xx} 对方程(1) 两边作内积，有

$$(u_t,u_{xx})-(u_{xxt},u_{xx})-\varepsilon(u_{xx},u_{xx})+(g(u)_x,u_{xx})=(2u_xu_{xx},u_{xx})+(uu_{xxx},u_{xx})$$

通过分部积分及边界周期条件得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_1^2)+2\varepsilon|u|_2^2=(g(u)_x,u_{xx})-\frac{3}{2}(u_xu_{xx},u_{xx})$$

利用 Young 不等式、Agmon 不等式、Holdler 不等式以及嵌入定理，可以得到

$$(g(u)_x,u_{xx})\leqslant cAq\lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|_1^q|u|_2$$

$$\int_\Omega u_xu_{xx}{}^2\mathrm{d}x\leqslant|u|_{1\infty}|u|_2^2\leqslant c|u|_1^{\frac{1}{2}}|u|_2^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_1^2)\leqslant\frac{c^2A^2q^2\lambda_1^{-1}}{\varepsilon}M_0^{\frac{2q-3}{2}}\mathrm{e}^{-(2q-3)\frac{\varepsilon\rho}{2}t}|u|_1^3+\frac{9c^2}{2\varepsilon}M_0\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{2}t}|u|_2^3$$

取

$$k_0=\max\left\{\frac{c^2A^2q^2\lambda_1^{-1}}{\varepsilon}M_0^{\frac{2q-3}{2}},\ \frac{9c^2}{2\varepsilon}M_0\right\},\ m_0=\min\left\{(2q-3)\frac{\varepsilon\rho}{2},\ \frac{\varepsilon\rho}{2}\right\}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_1^2)\leqslant k_0\mathrm{e}^{-m_0t}(|u|_2^3+|u|_1^3)\leqslant k_0\mathrm{e}^{-m_0t}(|u|_2^2+|u|_1^2)^{\frac{3}{2}}$$

利用常微分方程的比较定理得

$$|u|_2^2+|u|_1^2\leqslant\frac{1}{\left[(|u_0|_2^2+|u_0|_1^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{2k_0}{m_0}(1-\mathrm{e}^{-m_0t})\right]^2}$$

又因 $\sup\limits_{t\to\infty}\dfrac{2k_0}{m_0}(1-\mathrm{e}^{-m_0t})=\dfrac{2k_0}{m_0}$，所以须 $(|u_0|_2^2+|u_0|_1^2)^{-\frac{1}{2}}>\dfrac{2k_0}{m_0}$，即 $(|u_0|_2^2+|u_0|_1^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant(1+\dfrac{1}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}}|u_0|_2\leqslant\dfrac{m_0}{2k_0}$，所以当 $|u_0|_2\leqslant\dfrac{m_0}{2k_0}(1+\dfrac{1}{\lambda_1})^{-\frac{1}{2}}$ 时，$|u|_2^2+|u|_1^2\leqslant M_1^2$. 再用 u_{xxxx} 对方程(1) 两边在 Ω 上作内积，有：

$$(u_t,u_{xxxx})-(u_{xxt},u_{xxxx})-\varepsilon(u_{xx},u_{xxxx})+(g(u)_x,u_{xxxx})=(2u_xu_{xx},u_{xxxx})+(uu_{xxx},u_{xxxx})$$

通过分部积分及边界周期条件得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_3^2)+2\varepsilon|u|_2^2=2(g(u)_x,u_{xxxx})-5(u_xu_{xxx},u_{xxx})\leqslant$$

$$cAqM_0^{q-1}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{2}(q-1)t}(|u|_2^2+|u|_3^2)+5cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}t}|u|_3^2+$$

$$c\lambda_1^{-\frac{1}{2}}Aq(q-1)M_0^{\frac{q-2}{2}}M_1^{\frac{q}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}(q-1)t}(|u|_2^2+|u|_3^2)$$

令

$$k_1=\max\{cAqM_0^{q-1},\ 5cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}},\ c\lambda_1^{-\frac{1}{2}}Aq(q-1)M_0^{\frac{q-2}{2}}M_1^{\frac{q}{2}}\}\ m_1=\min\left\{\frac{\varepsilon\rho}{2}(q-1),\ \frac{\varepsilon\rho}{4},\ \frac{\varepsilon\rho}{4}(q-1)\right\}$$

再由 Young 不等式得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_3^2)+\varepsilon\rho(|u|_2^2+|u|_3^2)\leqslant k_1\mathrm{e}^{-m_1t}(|u|_2^2+|u|_3^2)$，故$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|_2^2+|u|_3^2)\leqslant k_1\mathrm{e}^{-m_1t}(|u|_2^2+|u|_3^2)$. 再根据 Gronwall 不等式，可得到 $|u|_2^2+|u|_3^2\leqslant M_2^2((|u_0|_2^2+|u_0|_3^2)\mathrm{e}^{\frac{k_1}{m_1}}=M_2^2)$. 引理 2 得证.

下面在 $H'(\Omega)$ 空间对 $|v|$ 作出估计. 令 $v=u-u_{xx}$ 则方程(1) 可以化为

$$v_t+\varepsilon(v-u)+2vu_x+uv_x-3uu_x+g(u)_x=0$$

两边关于 x 求导有

$$v_{xt}+\varepsilon(v-u)_x+2(vu_x)_x+(uv_x)_x-3(uu_x)+g(u)_{xx}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_1^2=(v_{tx},v_x)=3(u_x^2,v_x)+3(uu_{xx},v_x)-(g'(u)u_{xx},v_x)-(g''(u)u_x^2,v_x)-$$
$$3(u_xv_x,v_x)-2(u_{xx}v,v_x)-(uv_{xx},v_x)+\varepsilon(u_x,v_x)-\varepsilon(v_x,v_x)$$

利用 Young 不等式、Agmon 不等式、Holdler 不等式、嵌入定理以及边界条件有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_1^2\leqslant\ &6|u|_{1\infty}|u|_1|v|_1+6|u|_{0\infty}|u|_2|v|_1+2Acq|u|_0^{\frac{q-1}{2}}|u|_1^{\frac{q-1}{2}}|u|_2|v|_1+\\&2cAq(q-1)|u|_0^{\frac{q-2}{2}}|v|_1|u|_1^{\frac{q-2}{2}}+\\&4|u|_{1\infty}|v|_1^2+4|u|_{2\infty}|v|_0|v|_1+3|u|_{1\infty}|v|_1^2\leqslant\\&6cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}t}|v|_1^2+6cM_0\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{2}t}|v|_1^2+2AcqM_0^{q-1}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{2}(q-1)t}|v|_1^2+\\&2c\lambda_1^{-\frac{1}{2}}Aq(q-1)M_0^{\frac{q-2}{2}}M_1^{\frac{q}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}(q-1)t}|v|_1^2+4cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}t}|v|_1^2+\\&4cM_1^{\frac{1}{2}}M_2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}}|v|_1^2+3cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\rho}{4}t}|v|_1^2\end{aligned}$$

取

$$k_2=\max\{6cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}},\ 6cM_0,\ 2AcqM_0^{q-1},\ 2c\lambda_1^{-\frac{1}{2}}Aq(q-1)M_0^{\frac{q-2}{2}}M_1^{\frac{q}{2}},\ 4cM_0^{\frac{1}{2}}M_1^{\frac{1}{2}},\ 4cM_1^{\frac{1}{2}}M_2^{\frac{1}{2}}\}$$

利用 Agmon 不等式及引理 1,2 有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|_1^2\leqslant k_2\mathrm{e}^{-m_1t}|v|_1^2$(其中 k_2 依赖于 ε，M_0，M_1，M_2 和 u_o)，故 $|v|_1^2\leqslant M_3^2(|v_0|_1^2\mathrm{e}^{\frac{k_2}{m_1}}=M_3^2)$.

定理 2 假设 $u_0\in H^3(R)$，$u(0,t)=u(l,t)u_t(0,t)=u_t(l,t)$ 成立，并且 $|u_0|_2\leqslant\frac{m_0}{2k_0}$(其中 k_0，m_0 见定理 1). 则方程(1) 和方程(1) 的解半群在 H^2 上具有整体吸引子.

证 从文献[6] 知，只要能够证明从 $H^2(\Omega)$ 到 $H^2(\Omega)$ 的映射是一个紧映射，即 $S(t)$：$H^2(\Omega)\longrightarrow H^2(\Omega)$，$u_0\longmapsto u=S(t)u_0$ 是紧的，就能证明半群 $S(t)$ 具有整体吸引子. 为此，利用内积估计来证明映射的紧致性. 用 t^2u_{xxxx} 对方程(1) 两边在 Ω 上作内积，有：

$$(u_t,t^2u_{xxxx})-(u_{xxt},t^2u_{xxxx})-\varepsilon(u_{xx},t^2u_{xxxx})+(g(u)_x,t^2u_{xxxx})=$$
$$(2u_xu_{xx},t^2u_{xxxx})+(uu_{xxx},t^2u_{xxxx})$$

通过分部积分及边界周期条件得：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|tu|_2^2+|tu|_3^2)+2\varepsilon|tu|_3^2=2(g(u)_x,t^2u_{xxxx})-5(u_xu_{xxx},t^2u_{xxxx})+2t(|u|_2^2+|u|_3^2)=-\\&2(g'(u)u_{xx},t^2u_{xxx})-2(g''(u)u_x{}^2,t^2u_{xxx})-5(u_xu_{xxx},t^2u_{xxx})+2t(|u|_2^2+|u|_3^2)\leqslant\\&2Aq|u|_{0\infty}{}^{q-1}|tu|_3|tu|_2+5|u|_{1\infty}|tu|_3^2+2t(|u|_2^2+|u|_3^2)+\\&2Aq(q-1)\lambda^{-\frac{1}{2}}|u|_{0\infty}{}^{q-2}|u|_1|tu|_3|tu|_2\leqslant\\&2cAq|u|_0^{\frac{q-1}{2}}|u|_1^{\frac{q-1}{2}}|tu|_2|tu|_3+5c|u|_1^{\frac{1}{2}}|u|_2^{\frac{1}{2}}|tu|_3^2+\\&2t(|u|_2^2+|u|_3^2)+2cAq(q-1)\lambda^{-\frac{1}{2}}|u|_0^{\frac{q-2}{2}}|u|_1^{\frac{q}{2}}|tu|_3|tu|_2\end{aligned}$$

由于在 t 足够大时，有 $|u|_0^2 \to 0$，$|u|_1^2 \to 0$，$|u|_2^2 \to 0$，因此：

$$cAq|u|_0^{\frac{q-1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon\rho}{4},\ 5c|u|_1^{\frac{1}{2}}|u|_2^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon\rho}{2}$$

$$cAq(q-1)\lambda^{-\frac{1}{2}}|u|_0^{\frac{q-2}{2}}|u|_1^{\frac{q}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon\rho}{4}$$

则得到下列不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|tu|_2^2+|tu|_3^2)+\rho\varepsilon(|tu|_3^2+|tu|_2^2) \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon\rho}{2}|tu|_2|tu|_3+\frac{\varepsilon\rho}{2}|tu|_3^2+\frac{\varepsilon\rho}{4}(|tu|_2^2+|tu|_3^2)+\frac{8}{\varepsilon\rho}(|u|_2^2+|u|_3^2)$$

再由 Young 不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|tu|_2^2+|tu|_3^2) \leqslant \frac{8}{\varepsilon\rho}(|u|_2^2+|u|_3^2) \leqslant \frac{8}{\varepsilon\rho}M_2^2$$

故有

$$|tu|_2^2+|tu|_3^2 \leqslant \frac{8}{\varepsilon\rho}M_2^2 t$$

又有 $t \to \infty$ 时可得到 $|u|_3^2 \leqslant \frac{8}{\varepsilon\rho t}M_2^2 \to 0$，进一步可以判定 $S(t)$ 是等度连续的，根据 Ascoli-Arzela 定理，可以证明 $S(t)$ 在 $H^2(\Omega)$ 中是全连续的，定理 2 得证.

参考文献：

[1] CAMASSA R，HOLM D D. An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons [J]. Phys Rev Lett，1993，71(11)：1661－1664.

[2] CONSTATIN A，ESCHER J. Global Existence and Blow-up for a Shallow Water Equation [J]. Ann Scuola Norm，SUP Pisacl Sci，1998，XXXI(4)：303－328.

[3] CHEN S，FOIAS C，HOLM D D，et al. The Camassa-Holm Equations as a Closure Model for Turbulent Channel Flow [J]. Phys Rev Lett，1998，81(24)：5538－5341.

[4] 丁丹平，田立新. 耗散 Camas-Holm 方程的吸引子 [J]. 应用数学学报，2004，27(3)：536－545.

[5] YANG Ling-e，GUO Bo-ling. Global attractor for Camassa-Holm type equation with dissipative term [J]. 数学物理学报，2005，25B(4)：621－628.

[6] 郭伯灵. 无穷维动力系统 [M]. 北京：国防工业出版社，2002.

[7] 王元明. 索伯列夫空间讲义 [M]. 南京：东南大学出版社，2003.

The Global Attractor for Generalized Cammasa-Holm Equation with Weak Dissipation

Guo Zhan-wei，Ding Dan-ping

Huashang College，Guangdong University of Business Studies，Guangzhou 511300，China

Abstract：The dynamical behavior of generalized Cammasa-Holm equation with weak dissipation：under the periodic boundary conditions are investigated. And the existence of the global solution and the general attractor is obtained.

Key words：Camassa-Holm Equation；global solution；global attractors

责任编辑　张　构